

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 7: מכניקת הקוונטים:
מרחב הילברט, פונקציות דלתא של דיראק, אופרטורים

1. יהי H מרחב הילברט. הוכיחו:

- (א) אם $\{x_n\} \subset H$ סדרת קושי, אזי קיים $x \in H$ כך ש $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.
 (ב) אם $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, כאשר $\{x_n\} \subset H$ סדרה, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ מתכנס ב H .

2. הראו כי הפונקציות הבאות הינן פונקציות דלתא (בגבול $\epsilon \rightarrow 0$).

$$f_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\epsilon^2}, \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (\text{א})$$

$$f_{\epsilon}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\epsilon^2} \sqrt{\epsilon^2 - x^2} & |x| \leq \epsilon \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (\text{ב})$$

(רמז: השתמשו בפונקציות מבחן $g \in C^{\infty}(-\infty, \infty)$ עם תומך קומפקטי על מנת להראות כי $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)g(x)dx = g(0)$).

3. הוכיחו את התכונות הבאות של יחסי חילוף

$$[A, B] = -[B, A] \quad (\text{א})$$

$$[A, f(A)] = 0 \quad (\text{ב})$$

$$[A, Const] = 0 \quad (\text{ג})$$

$$[A + B, C] = [A, C] + [B, C] \quad (\text{ד})$$

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \quad (\text{ה})$$

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0 \quad (\text{ו})$$

$$[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B] \quad \text{אז } [B, [A, B]] = 0 \quad (\text{ז})$$

(הגדירו $g_n = [A, B^n]$ והוכיחו באינדוקציה את הרקורסיה $g_n = Bg_{n-1} + g_1B^{n-1}$. כעת רשמו את g_n כסכום $g_n = \sum_{k=0}^{n-1} B^k g_1 B^{n-k-1}$ והראו כי $g_n = nB^{n-1}g_1$ כאשר $[B, g_1] = 0$).

4. הוכיחו כי לכל וקטור $|\varphi\rangle$ במרחב הילברט H מתקיים $\|U\varphi\|^2 = \|\varphi\|^2$ שומר על נורמה אם ורק אם $U^\dagger = U^{-1}$.
 (הדרכה: על מנת להוכיח כי U יוניטרי התבוננו בוקטור $|\varphi\rangle + \lambda|\chi\rangle$ כאשר $|\varphi\rangle, |\chi\rangle \in H$ ו $\lambda = 1$ ו $\lambda = i$ והסיקו כי U יוניטרי).

5. נתון אופרטור התלוי בזמן $A(t)$.

(א) הוכיחו כי ההתפתחות בזמן של ערך התצפית של $A(t)$ נתונה ע"י

$$\frac{d}{dt}\langle A \rangle = -\frac{i}{\hbar}\langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

(ב) השתמשו בתוצאת סעיף (א) כדי להוכיח את משפט ארנפסט המתאר את הקשר בין הדינמיקה של ערכי התוחלת של אופרטורי המקום והתנע $\frac{d}{dt}\langle p \rangle = -\langle \frac{dV}{dx} \rangle$, $\frac{d}{dt}\langle x \rangle = \langle p \rangle / m$ עבור חלקיק בעל מסה m .

(ג) עבור אוסילטור הרמוני עם פוטנציאל $V(x) = m\omega^2 x^2 / 2$, הראו כי התוחלת של אופרטור המקום נעה על פי המשוואה הקלאסית $\frac{d^2}{dt^2}\langle x \rangle = -\omega^2 \langle x \rangle$

6. חלקיק מוגבל לנוע על ציר x בלבד (בעיה חד מימדית) תחת השפעת פוט-נציאל כלשהוא $V(x)$.

(א) עבור חלקיק קשור, כמה מצבים עצמיים בלתי תלויים לינארית קיימים עבור אנרגיה נתונה E ?

(ב) אופרטור הזוגיות \hat{P} מוגדר כך שבמרחב x הפעולה שלו היא $\hat{P}x = -x$. מצאו את הערכים העצמיים של \hat{P} .

(ג) הוכיחו כי אם $V(x) = V(-x)$ אז $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$, כאשר \hat{H} הוא אופרטור האנרגיה של המערכת.

(ד) הוכיחו כי אם $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$ אז כל מצב עצמי קשור של האנרגיה הוא בעל זוגיות מוגדרת היטב, כלומר זוגי $\psi(x) = \psi(-x)$ או אי זוגי $-\psi(x) = \psi(-x)$.