

יישומים והצגת מודלים בעזרת משוואות דיפרנציאליות

דוגמא 1

אוכלוסיית חיידקים מתרבה בתנאי מעבדה אידיאליים בקצב פרופורציוני לגודלה. טענה זו נתרגם למשוואה דיפרנציאלית:

$y(t)$ הינו מספר החיידקים בזמן t ("גודל האוכלוסייה"). קצב גידול האוכלוסייה הוא, כפי שאנו יודעים, ערך הנגזרת של $y(t)$, כלומר: $y'(t)$.

ולכן את הנתון על קצב ריבוי שפרופורציוני לגודל נתרגם על ידי:

כאשר $y'(t) = \lambda y(t)$ פרמטר λ (ומכיוון שמדובר על ריבוי חיידקים נסיק כי הפרמטר הנ"ל חיובי!).

מד"ר כזו אנו יודעים לפתור, גם אם היה נתון לנו תנאי התחלה $y(0) = y_0$

דוגמא 2

"ריבית על השקעה":

בניח בזמן t סכום ההשקעה בבנק הוא $S(t)$ עם הריבית r על השקעה של 1 דולר לזמן השקעה $\Delta t = 1$. הרווח לתקופת זמן כללית של Δt נתון

על ידי: $\Delta S(t) = S(t + \Delta t) - S(t)$ ועל סמך הנתון על הריבית נוכל לרשום

$\Delta S(t) = rS(t)\Delta t$ (*) (כי ליחידת זמן השינוי ברווח הוא $rS(t)$, ועבור תקופת זמן של Δt נכפול את הרווח ליחידת זמן במספר יחידות הזמן הנ"ל, ומכאן הנוסחה).

את נוסחה (*) נוכל לרשום: $\frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = rS(t)$, ואם נשאיף $\Delta t \rightarrow 0$ נקבל:

, וזוהי המשוואה הדיפרנציאלית המבוקשת! $\frac{dS(t)}{dt} = rS(t)$

פתרון מד"ר לינארית זו הוא $S(t) = Ce^{rt}$

דוגמא 3

גוף במסה של 1 ק"ג מבצע נפילה חופשית בזכות כח הכבידה בתוך נוזל צמיגי שבתוכו מהירותו מואטת הודות לכח מעכב הפרופורציוני למהירותו.

נמצא ביטוי למד"ר המגדירה מהירותו של גוף זה:

תאוצת הכבידה תסומן ב- g , μ יסמן את קבוע הפרופורציה בין כח מעכב למהירות הגוף, ותהי v_0 מהירותו ההתחלתית של הגוף. המהירות

$$v = v(t) \text{ מקיימת את התנאים הפורמליים האלו:}$$

אם נסתמך על חוק ניוטון $F = ma$, כלומר הכח הפועל על גוף שמסתו m ותאוצתו a . נקבל כי: **(כח מעכב) – (כח כבידה) = כח על גוף**, או:

$$F = ma = mg - \mu v \text{ כאשר קיים } a = \frac{dv}{dt} \text{, ביטוי לתאוצת הגוף.}$$

לכן עבור מסה של 1, נקבל משוואה דיפרנציאלית: **$\frac{dv}{dt} = g - \mu v$** , מד"ר לינארית שאנו יודעים לפתור ...

*הערה: ראינו כאן דוגמא לכך שגודל משתנה הודות לשינוי בשני גורמים המרכיבים אותו (כאן גודל הוא קצב שינוי מהירות, כלומר תאוצה עם גורמים שמרכיבים אותה כמו תאוצת כבידה, וגודל שנתון שפרופורציוני למהירות).

דוגמא 4

בעיות שמתארות מצב של מיכל שלתוכו מכניסים כמות מסויימת בקצב הוספה מסויים (כמות לשנייה, כמות לדקה וכדומה), וכמות מסויימת מוצאת מהמיכל בקצב יציאה מסויים. בכל רגע נתון t , $y(t)$ יסמן את כמות החומר במיכל.

נרצה לדעת מהו קצב שינוי החומר במיכל ונוכל לתאר אותו על ידי:

$$(\text{קצב ההוצאה}) - (\text{קצב ההוספה}) = (\text{קצב שינוי החומר במיכל})$$

$$\frac{dy}{dt} = (input\ rate) - (output\ rate) \text{ : כלומר}$$

שאלה לדוגמא: מגדל מים מכיל 1 מיליון ליטרים של מים טהורים ויש בו שני שסתומים. שסתום אחד מאפשר כניסת עירוב של מים ופלוואריד בריכוז פלוואריד של 0.1 ק"ג בכל ליטר של מים-פלוואריד, בקצב כניסה של 80 ליטר לדקה של מים-פלוואריד.

השסתום השני מאפשר הוצאת מים-פלוואריד בקצב של 80 ליטר לדקה.

*נניח כי בכל נקודת זמן ריכוז הפלואוריד במיכל המים מפוזר שווה בכל המיכל (כלומר אחוז הפלואוריד בכמות מים מסויימת שווה לכל כמות שנדגום מהמיכל).

1. מצאו כמות בק"ג של פלואוריד במיכל t דקות לאחר פתיחת השסתומים.

2. כמה זמן ייקח לריכוז הפלואוריד במיכל להיות 0.05 ק"ג לליטר.

פיתרון:

נסמן ב $y(t)$ את כמות הפלואוריד בק"ג במיכל בזמן t . נמצא את קצב הוספת/גריעת הפלואוריד למיכל. נשים לב שמכיוון שבכל דקה נכנסים 80 ליטר מים ויוצאים 80 ליטר מים – כמות המים נשארת קבועה, מיליון ליטר. (ריכוז הפלואוריד הוא מה שמשתנה...)

קצב כניסה 80 ליטר נכנסים, כל ליטר מכיל 0.1 ק"ג פלואוריד ולכן בכל דקה יש כניסת 8 ק"ג פלואוריד. כלומר קצב של 8 ק"ג לדקה.

קצב יציאה כמות הפלואוריד בכל נקודת זמן במיכל היא $y(t)$, שמפוזרת באופן אחיד במיכל. כלומר כל ליטר של מים מכיל $\frac{y(t)}{1,000,000}$ ק"ג פלואוריד בכל זמן t . כל דקה מוצאים 80 ליטרים של מים לכן יחד איתם יוצאים מהמיכל

$$80 \cdot \frac{y(t)}{1,000,000} \text{ ק"ג פלואוריד. כלומר קצב כזה של יציאת פלואוריד.}$$

ולכן נקבל מד"ר על הקשר בין קצב שינוי הפלואוריד במיכל:

$$\text{מד"ר שיודעים לפתור ופתרונה הוא: } \frac{dy}{dt} = 8 - \frac{80 \cdot y(t)}{1,000,000}$$

$$y = 100,000 + Ce^{-0.00008t}, \text{ ואם נציב תנאי התחלה של כמות}$$

פלואוריד 0 בזמן ההתחלה נקבל

$$y = 100,000 - 100,000e^{-0.00008t}.$$

כדי לדעת מתי תהיה כמות הפלואוריד שווה ל 0.05 ק"ג לליטר, שזה שקול לשאול מתי יתקיים $y = 50000$ (כאשר נזכור ש y הוא כמות הפלואוריד ואנו דורשים שהיחס בינו לסך כמות התערובת במיכל – 1,000,000 ליטר, יעמוד על 0.05). חישוב מקורב ייתן לנו $t \approx 8664.3$