

מרצה: דר' ארז שיינר
משך המבחן: שלוש שעות
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק'
ענו על כל השאלות
כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) \sin^2(3x)}{1 - \cos(5x)}$ ב. $\lim_{x \rightarrow (-\infty)} x e^x$ ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2)!}{(n!)^2}$

2.

א. חשבו את $\int \frac{e^{4x} + e^x}{e^{2x} + 2e^x + 2} dx$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^4 + 1} dx$

3.

א. הוכיחו כי למשוואה $e^x(x-1) = 1$ יש פתרון יחיד.

ב. הוכיחו כי לפונקציה $f(x) = \frac{x}{1+e^x}$ יש נקודת מקסימום גלובאלית.

4. תהי פונקציה f הגזירה בכל הממשיים, ומקיימת כי $f''(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

א. יהי $a \in \mathbb{R}$, הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x+a) \geq f'(a)x + f(a)$.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה חסומה מלעיל.

5. נביט בסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n(a_n + 1)$, ותנאי ההתחלה $0 < a_1$.

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

ב. חשבו את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{n+2k}{n^3}}$

ב. קרבו את $\ln(\sqrt{2})$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{5}$.