קומפקטיות(במרחבים מטריים)

הגדרות

נניח M מ"מ נתון.

(א) כיסוי של M זה אוסף $\{U_i\}_{i\in I}$ של תת קבוצות בM כך ש $\boxed{\bigcup_{i\in I} U_i = M}$

אומרים כיסוי פתוח אם כל U_i פתוחה בM

(ב) אוסף חלקי $\{U_j\}_{j\in J}$ נקרא תת כיסוי של $\{U_i\}_{i\in I}$ אם $J\subseteq I$ וגם $\bigcup_{j\in J} U_j = M$

(ג) $\gamma_\epsilon := \{B(x,\epsilon)\}_{x\in M}$ זה מקרה פרטי של כיסוי פתוח עבור M.

(ד) אומרים שמספר $\delta > 0$ הוא מספר לבג(Lebesgue) עבור כיסוי פתוח $\{U_i\}_{i\in I}$ אם $\gamma_\delta = \{B(x,\delta)\}_{x\in M}$ "מעדן" את $\{u_i\}_{i\in I}$

"מעדן" = ז"א לכל $B(x,\delta)$ קיים $i_0 \in I$ כך ש $B(x,\delta)\subseteq U_{i_0}$

הגדרה של קומפקטיות(Compact Spaces)

אומרים שM קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח $\alpha = \{U_i\}_{i\in I}$ של M קיים תת־כיסוי סופי.

דוגמאות

1. $\mathbb{R}$ לא קומפקטי.
למשל, $\{U_n = (n,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ כיסוי פתוח. אבל אין תת כיסוי סופיף אחרת נקבל ש$\mathbb{R} = (-n_0, n_0)$ כי $\exists n_0 = \max\{n_1, n_2, \dots n_m\}$, וזו סתירה כי $\mathbb{R}$ לא חסום.

2. **טענה**
כל מרחב מטרי קומפקטי הוא חסום.[1]

הוכחה: ד=נבחר $x_0 \in M$. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_0,n) = M$ כיסוי פתוח של M.
M קומפקטי $\Leftarrow$ קיים תת כיסוי סופי. אזי

$$\exists_{n_0(=\max\{n_1,n_2,\dots n_m\}} M = B(x_0,n_0)$$

כי אם קיים תת כיסוי סופי אז $M = B(x_0,n_1)\cup\cdots\cup B(x_0,n_m)$.
מהשוויון נובע שM חסום.

[1] ז"א קיים $c > 0$ כך ש $\boxed{\forall_{x,y\in M} d(x,y)\le c}$ $\Leftrightarrow$ $\exists_{x\in M}\exists_{r>0}$ $M = B(x,r)$

משפט

נניח (M,d) מרחב מטרי. התנאים הבאים שקולים:

1. M קומפקטי
2. לכל תת קבוצה אינסופית $E \subseteq M$ קיימת נקודת הצטברות של E.
3. לכל סדרה בM יש תת סדרה מתכנסת

הוכחה

$1 \Leftarrow 2$ נניח בשלילה ש2 לא מתקיים, ז"א קיימת תת קבוצה אינסופית $E \subseteq M$ ללא נקודות הצטברות. לכן, לכל $x \in M$ קיים $0 < \epsilon_x$ כך ש

$$B\left(x,\epsilon_x\right) \cap E \backslash \left\{x\right\} = \emptyset$$

מכאן $B\left(x,\epsilon_x\right) \cap E = \begin{cases} \left\{x\right\} & x \in E \\ \emptyset & x \notin E \end{cases}$.

$\left\{B\left(x,\epsilon_x\right)\right\}_{x \in M}$ כיסוי פתוח של M.

$$\bigcup_{\alpha \in M} B\left(x,\epsilon_x\right) = M$$

בגלל הקומפקטיות של $M \Leftarrow$ קיים תת כיסוי סופי, ז"א קיימים $x_1,x_2,...x_m \in M$ כך ש

$$\bigcup_{i=1}^{m} B\left(x_i,\epsilon_{x_i}\right) = M$$

$$\bigcup_{i=1}^{m} \left(E \cap B\left(x_i,\epsilon_{x_i}\right)\right) = E \cap M = E$$

$$\Downarrow$$

$|E| \le m < \infty$ העצמה, לכן E קבוצה סופית וזו סתירה.

$2 \Leftarrow 3$ נניח $\left\{x_n\right\}$ סדרה נתונה בM. צ"ל קיימת תת סדרה מתכנסת.

אם יש מספר <u>סופי</u> של ערכים בסדרה, אז יש לפחות ערך אחד שמופיע אינסוף פעמים, לכן באופן טריוויאלי אפשר לבחור תת סדרה קבועה(והיא כמובן מתכנסת). לכן בה"כ אפשר להניח שיש אינסוף ערכים.
נסמן בE ערכים של הסדרה. E קבוצה אינסופית.
לפי נתון 2 קיימת נקודת הצטברות $p \in M$ עבור קבוצה E.

$$\left|B\left(p,\frac{1}{m}\right) \cap E \backslash P\right| \ge \aleph_0$$

ניתן לבנות תת סדרה של איברים שונים זה מזה:

$$\exists x_{n_1} \in B\left(p, \frac{1}{1}\right) \cap (E \backslash \{p\})$$

$$\exists x_{n_2} \in B\left(p, \frac{1}{2}\right) \cap (E \backslash \{p\}) \qquad x_{n_2} \neq x_{n_1}, n_2 > n_1$$

$$\exists x_{n_3} \in B\left(p, \frac{1}{3}\right) \cap (E \backslash \{p\}) \qquad x_{n_3} \notin \{x_{n_1}, x_{n_2}\}, n_3 > n_2$$

נמשיך כך ואז נקבל תת סדרה

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$$

של $\{x_n\}$ כך ש$p \xrightarrow{M} x_{n_k}$, כי <u>כל</u> כדור של p מכיל כמעט את כל האיברים של $\{x_{n_k}\}$ לפי הבנייה.

$3 \Leftarrow 1$ נניח $\{U_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של M. צ"ל שיש תת כיסוי סופי.

שלב I נוכיח שקיים מספר לבג $\delta > 0$ עבור $\{U_i\}_{i\in I}$.
ז"א נוכיח שקיים $\delta > 0$ כך ש$\gamma_\delta = \{B(x,\delta)\}_{x\in M}$ עידון של $\{U_i\}$. ז"א:

$$\exists_{\delta>0} \boxed{\forall_{x\in M} \exists_{i_0 \in I} B(x,\delta) \subseteq U_{i_0}}$$

נניח בשלילה שזה לא מתקיים:

$$\left(\forall_{\frac{1}{n}}\right) \forall_n \boxed{\exists_{x_n \in M} \forall_{i\in I} B\left(x_n \frac{1}{n}\right) \subseteq U_i}$$

קיבלנו סדרה $\{x_n\}$בM.
לפי 3 $\Leftarrow$ קיימת תת סדרה מתכנסת $\{x_{n_k}\}$. ז"א קיים $p \in M$ כך ש$p \xrightarrow[k\to\infty]{M} x_{n_k}$

$$\bigcup_{i\in I} U_i = M \ni p$$

$$\Downarrow$$

$$\exists_{i_0\in I} p \in U_{i_0}$$

נתון U_{i_0} קבוצה פתוחה. לכן קיים $\epsilon > 0$ כך ש

$$\boxed{B(p,\epsilon) \subseteq U_{i_0}}$$

ניקח n_k מספיק גדול כך שמתקיים

$$\begin{cases} \frac{1}{n_k} < \frac{\epsilon}{2} \\ d\left(x_{n_k}, p\right) < \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

אז מתקיים $\boxed{B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subseteq U_{i_0}}$

הסבר: $x \in B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \Leftarrow \begin{cases} d\left(x, x_{n_k}\right) < \frac{1}{n_k} < \frac{\epsilon}{2} \\ d\left(x_{n_k}, p\right) < \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$

ומאי שוויון המשולש נקבל $d\left(x,p\right) < \epsilon$.

$$x \in B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \Rightarrow x \in B\left(p, \epsilon\right)$$

$$\Downarrow B\left(p, \epsilon\right) \subseteq U_{i_0}$$

$$B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subseteq U_{i_0}$$

$\Leftarrow$ סתירה $\Leftarrow$ הוכחנו את שלב I, ז"א יש מספר לבג $0 < \delta$.

שלב II נתון 3, צ"ל 1(קומפקטיות).

נניח בשלילה שM לא קומפקטי. ז"א קיים כיסוי פתוח $\alpha = \{U_i\}_{i\in I}$ בלי תת־כיסוי סופי.

לפי שלב I קיים מספר לבג. נניח הוא $0 < \delta$ (ל-$\gamma_\delta = \{B\left(x,\delta\right)\}_{i\in M} \prec$ α)

נבחר $x_1 \in M$.

$$\exists x_2 \notin B\left(x_1, \delta\right)$$

$$\exists x_3 \notin B\left(x_1, \delta\right) \cup B\left(x_2, \delta\right)$$

$$\exists x_4 \notin B\left(x_1, \delta\right) \cup B\left(x_2, \delta\right) \cup B\left(x_3, \delta\right)$$

נמשיך כך:

$$\exists x_{n+1} \notin B\left(x_1, \delta\right) \cup \cdots \cup B\left(x_n, \delta\right)$$

קיים לכל n כי אחרת נקבל $M = B\left(x_1, \delta\right) \cup \cdots \cup B\left(x_n, \delta\right)$.

לפי הגדרת מס' לבג לכל x_k, $1 \le k \le n$ קיים $U_{i_k} \in \alpha$ כך

ש $\boxed{B\left(x_k,\delta\right)\subseteq U_{i_k}}$.
נקבל:

$$M=U_{i_1}\cup U_{i_2}\cup\cdots\cup U_{i_n}$$

ז"א $\left\{U_{i_1},U_{i_2},\ldots U_{i_n}\right\}$ תת־כיסוי סופי של M, בסתירה לבחירת α. לכן קיבלנו סדרה $\left\{x_n\right\}$ עם התכונה $\boxed{\begin{matrix} d\left(x_i,x_j\right)\geq\delta \\ i\neq j\end{matrix}}$.
אין תת סדרה מתכנסת(אין תת סדרת קושי!) לכן 3 לא נכון ־ ■

הערה

לפי המשפט הקודם 1,2,3 שקולים. לכן בכל מרחב קומפקטי מטרי לכל כיסוי פתוח קיים מספר לבג.

טענה

נניח (M,d) מרחב מטרי, $\left(Y,d_Y\right)$ תת מרחב מטרי(כלומר $Y\subseteq M$, $d_Y\left(y_1,y_2\right)=d\left(y_1,y_2\right)$).
אם $\left(Y,d_Y\right)$ מרחב קומפקטי אזי Y תת קבוצה סגורה בM.

הוכחה

נניח בשלילה שY לא סגורה במרחב M. ז"א Y לא סגורה בM לגבי הגבולות. לכן קיימת סדרה $y_n\in Y$ כך שקיים $\begin{cases} y_n\xrightarrow{M}p\in M \\ p\notin Y\end{cases}$
Y קומפקטי $\Leftarrow$ Y "קומפקטי סדרתית"(ז"א מתקיים 3 במשפט) $\Leftarrow$ קיימת תת סדרה $\left\{y_{n_k}\right\}$ מתכנסת בY(לq). אז $y_{n_k}\xrightarrow{M}q$ (כי $d|_Y=d_Y$). נקבל שיש 2 גבולות שונים $Y\ni q\neq p\notin Y$ לאותה סדרה $\left\{y_{n_k}\right\}$ ־ סתירה $\Leftarrow$ ■

משפט Heine-Borel

נניח $M\subseteq\mathbb{R}^n$. התנאים שקולים:

1. M קומפקטי(כתת מרחב)
2. M חסום וסגור(כתת קבוצה במרחב $\mathbb{R}^n$)

הוכחה

$1\Leftarrow 2$ שילוב של 2 טענות שהוכחנו!

$1\Rightarrow 2$ צ"ל 1 קומפקטיות. שקול לקומפקטיות סדרתית(בגלל המשפט).
נניח סדרה $\left\{v_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ בM.

M חסום $\Leftarrow$ קיים $0<c$ קבוע כך ש $\forall_k\ \left\|v_k\right\|\leq c$ $\Leftarrow$ $\boxed{v_k=\left(x_1^k,x_2^k,\ldots x_k^k\right)}_{k\in\mathbb{N}}$

סדרה בM.
לפי משפט בולצנו ווירשטראס קיימת תת סדרה מתכנסת $\{x_1^k\}_{k\in\mathbb{N}}$. בהתאמה נקבל תת סדרה של $\{v_k\}$. נמשיך באופן דומה עבור רכיב שני.
אם נמשיך בתת סדרה שהתקבלה בצורה כזאת, אחרי n צעדים נקבל תת סדרה מסויימת של $\{v_{k_m}\}$ של $\{v_k\}$. נקבל ש$\{v_{k_m}\}$ סדרה של nיות שמתכנסת רכיב רכיב. לכן בגלל התאור של התכנסות ב$\mathbb{R}^n$(או לפי בדיקה פשוטה) נקבל שהסדרה היא מתכנסת ב$\mathbb{R}^n$.
בגלל הסגירות של M, מתכנסת גם בM.

תרגיל

1. להוכיח שספירה ב$\mathbb{R}^n$ קומפקטית
2. למצוא מרחב מטרי M ותת קבוצה $Y \subseteq M$ חסומה וסגורה לא קומפקטית.

   רמז: מרחב דיסקרטי אינסופי...