שאלות פתוחות תרגיל בית 8

1. תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת x_0 ונתון שלכל סדרה a_n המתכנסת ל x_0 מתקיים כי $f(a_n)$ היא סדרה מתכנסת. הוכיחו כי הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ קיים.

(במילים אחרות, אתם צריכים להוכיח שכל סדרה $f(a_n)$ מתכנסת לאותו מספר)

פתרון: נניח שיש שתי סדרות a_n ו b_n כך ש

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = M$$

ו

$$M \neq L$$

אז אפשר לקחת סדרה c_n שאבריה הזוגיים הם אברי a_n ואבריה האי זוגיים הם איברי b_n. לפי הנתון

$$f(c_n)$$

היא סדרה מתכנסת. אבל יש לה תת סדרה אחת שמתכנסת ל M ואחרת שמתכנסת ל L. סתירה.

2. תנו דוגמא נגדית לטענה הבאה: אם

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = x_1, \quad \lim_{x\to x_1} g(x) = L$$

אזי

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = L$$

פתרון: ניקח

$$f(x) = 0$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

וניקח $x_0 = x_1 = 0$. אז כמובן ש

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

אבל $f(g(x)) = 1$ ולכן כמובן

$$\lim_{x\to 0} f(g(x)) = 1$$

3. חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

לפי החישוב

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$