בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה 88-195 מרצה: ד"ר אלי בגנו. מתרגל: אפי כהן.

סמסטר קייץ תשס"ז – מועד א. אלול תשס"ז.

משך המבחן: שלש שעות.

הוראות הפעלה:

במבחן שני חלקים. בחלק הראשון עליכם לענות על שאלה 1 ועל עוד שאלה אחת **בלבד** מתוך שאלות 2 ו 3. משקל כל שאלה 20 נקודות. **שימו לב: ההוכחות בחלק זה חייבות להיות מתמטיות. אין לספר סיפורים.**

בחלק השני עליכם לצבור 60 נקודות. פעלו לפי ההנחיות בגוף השאלות. משקל כל שאלה 12 נקודות. (לכל סעיף אותו משקל).

כל הגרפים במבחן הם פשוטים: ללא לולאות וללא צלעות כפולות.

כל התשובות בדפים. המחברת משמשת לטיוטה בלבד.

סימונים: $N = \{1,2,3,...\}$.

חלק א'

בחלק זה עליכם לענות על שאלה 1 וכן על שאלה אחת **בדיוק** מתוך 2 ו 3.

שאלה 1 (חובה).

יהיו A,B קבוצות. הוכיחו:

א. אם $A\cap B=\varnothing$ אז $P(A)\cap P(B)=\{\varnothing\}$. (7 נקודות).

הוכיחו בעזרת הכלה דו כיוונית בלבד. הוכחה מהסוג: "A ו B זרות ולכן הקבוצה הריקה היא היחידה המשותפת לשתיהן" לא תתקבל.

ב. נגדיר $A\oplus B=(A\cup B)-(B\cap A)$.

הוכיחו: $A\cap B\cap C\subseteq(A\oplus B)\oplus C$. ההוכחה חייבת להיות באמצעות הכלה. (נניח ש x שייך לאגף שמאל, נוכיח שהוא נמצא באגף ימין). (8 נקודות).

ג. תהי $f:P(\{1,..,n\})\to P(\{1,..,n\})$ מוגדרת ע"י $f(B)=\begin{cases}B\cup\{n\} & n\notin B\\ B-\{n\} & n\in B\end{cases}$ לכל $B\in P(\{1,...,n\})$.

כתבו את f בעזרת ההפרש הסימטרי כך: $f(B)=\_\oplus\_$ (בלי חלוקה למקרים). אין צורך להוכיח. (5 נקודות)

<u>שאלה 2</u>

יהיו A,B,C קבוצות כאשר $|C| \geq 2$. תהי $f: A \to B$.

נגדיר $\phi: C^B \to C^A$ ע"י $\phi(g) = g \circ f$.

א. הוכיחו כי ϕ חד חד ערכית אם ורק אם f על. (10 נקודות).

ב. הוכיחו כי ϕ על אם ורק אם f חד חד ערכית. (10 נקודות).

שימו לב: נדרשת ההוכחה מתמטית ולא סיפור. זכרו : כדי להוכיח שפונקציה h כלשהיא חד חד ערכית, מניחים ש $h(x_1) = h(x_2)$ ומוכיחים...

<u>שאלה 3</u>

א. מטילים 10 קוביות (שונות). מהו מספר התוצאות האפשריות בהן מתקבל כל אחד מהמספרים "1" עד "6" לפחות פעם אחת ? העזרו בעקרון ההכלה וההדחה. הסבירו תשובתכם!

הערה : ניתן להשאיר את התשובה כסכום ביטויים וללא חישוב התוצאה הסופית. (12 נקודות).

ב.פתרו את נוסחת הרקורסיה : $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$ כאשר $\begin{matrix} a_0 = 1 \\ a_1 = 11 \end{matrix}$. (8 נקודות).

חלק ב'

בחלק זה עליכם לענות לפי ההנחיות בגוף השאלה. כל שאלה שווה 12 נקודות. לכל סעיף משקל זהה.

שאלה 4

בשאלה זו עליכם להקיף בעיגול את התשובה הנכונה.

כמה אפשרויות יש לחלק 20 כדורים זהים לארבעה ילדים חמודים (לא זהים) כאשר כל ילד מקבל לפחות כדור אחד?

א. $\binom{23}{3}$.   ב. $\binom{19}{3}$.   ג. 20^4.   ד. אף לא אחת מהתשובות האחרות נכונות.

שאלה 5

בשאלה זו עליכם להשלים את עצמת הקבוצה הנתונה:

א. $A=\{(m,n) \mid m,n \in N\}$. ______________.

ב. איחוד בן מנייה של קבוצות זרות שעוצמת כל אחת היא $\aleph$. ____________.

ג. קבוצת כל הסדרות הסופיות של אותיות הלקוחות מאלף בית שעצמתו $\aleph_0$. ______________.

ד. קבוצת הפונקציות שתחומם הוא N והטווח הוא קבוצת התת קבוצות של N

______________.

שאלה 6

תהיינה A,B קבוצות כך ש $|A|=n, |B|=k$. נניח ש $n<k$.

א. מספר היחסים על A הוא: ______________.

ב. מספר הפונקציות מ A ל B הוא: ___________.

ג. מספר הפונקציות החד חד ערכיות מ A ל B הוא: ___________.

ד. מספר הפונקציות החד חד ערכיות ועל מ A ל B הוא: ________.

שאלה 7

ענו נכון או לא נכון.

יהיו A,B קבוצות לא ריקות.

א. אם $(A\times B)\cap(B\times A)\neq\emptyset$ אז $|A\cap B|>0$.

ב. אם $(A\times B)\cap(B\times A)\neq\emptyset$ אז $A\cap B\neq\emptyset$.

ג. $P(A)\times P(B)=P(A\times B)$.

ד. $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

שאלה 8

בסעיפים א,ב ענו נכון או לא נכון בלבד.

תהי $\Re$ קבוצת המספרים הממשיים. תהי A תת קבוצה של $\Re$.

א. אם $|A|=\aleph_0$ אז $|\Re-A|=\aleph$.

ב. אם $|A|=\aleph$ אז $|\Re-A|=0$.

בסעיפים ג, ד השלימו את הקו:

ג.נניח ש $|A|=3k$ כאשר k מספר טבעי. כמה יחסי שקילות מקיימים: כל מחלקות השקילות ש E מגדיר הן בעלות 3 איברים בדיוק? _______________ .

ד. מספר יחסי השקילות מעל קבוצה בת 4 איברים הוא:_________.

שאלה 9

ענו נכון או לא נכון בלבד.

א. בגרף השלם K_n יש מעגל אוילר אם ורק אם n זוגי.

ב. יש גרף בן 6 קדקדים שדרגותיו 1,2,3,4,5,5.

ג. יש גרף בעל מסלול אוילר שדרגותיו 1,2,3,3,4,5.

ד. קיים גרף מישורי בעל 8 קדקדים כך שדרגת כל קדקד היא 5.

בהצלחה