

תרגיל 11 אינפי 1

1. תהי f רציפה בכל נקודה בקטע (a, ∞) כך ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ וגם $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = m \in \mathbb{R}$ (כלומר הגבולות הנ"ל קיימים וסופיים). הוכיחו ש- f רציפה במ"ש בקטע (a, ∞) .
2. תהי פונקציה f המקיימת את התנאי הבא: קיים $k > 0$ כך שלכל $x_1, x_2 \in A$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$ (זה נקרא תנאי ליפשיץ). הוכיחו/הפריכו: רציפה במ"ש ב- A .
3. הוכיחו על פי ההגדרה שהפונקציה הבאה רציפה במ"ש בקטע $[-4, 3]$:
4. קבעו האם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש בקטעים הנתונים:
 - a. $\sin e^x$ בקטע $(0, \infty)$
 - b. $\frac{\sin(\sin x)}{\cos(\cos x)}$ בקטע $(-\infty, \infty)$
 - c. $\ln x$ בקטע $(0, \infty)$
 - d. $\ln(\ln(e^{e^x}))$ בקטע $(-\infty, \infty)$
 - e. $\sin \sqrt{x+2\pi}$ בקטע $(0, \infty)$
 - f. $e^{-\frac{1}{(\sin x)^2}}$ בקטע מהצורה $(\pi k, \pi k + \pi)$ עבור k שלם
 - g. $\ln \left| 1 - \sin \frac{1}{x} \right|$ בקטע $[0.1, \infty)$
5. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
 - א. אם $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה במ"ש בכל קטע $[n, n+1]$ עבור $n \in \mathbb{N}$ אזי f רציפה במ"ש בכל \mathbb{R} .
 - ב. אם f, g רציפות במ"ש בקטע I אזי גם $f + g$ רציפה במ"ש בקטע I .
 - ג. אם f, g רציפות במ"ש בקטע I אזי גם $f \cdot g$ רציפה במ"ש בקטע I .
6. הוכיחו את הטענה הבאה: יהיו f, g רציפות במ"ש וחסומות ב- \mathbb{R} . הוכיחו כי $f \cdot g$ רציפה במ"ש ב- \mathbb{R} .
7. יהיו $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפות במ"ש. הוכיחו כי $f \circ g$ (הרכבה) רציפה במ"ש.

בהצלחה!