תורת גלואה – תרגיל 5

1. תנו דוגמה לפולינום אי-פריק מעל $Q$ שחבורת גלואה שלו היא $Z\_{2}^{3}$.
2. נתון פולינום ספרבילי אי-פריק מעל שדה כלשהו. ידוע כי לשדה הפיצול שלו יש תת-שדה ריבועי יחיד. חשבו את האפשרויות לחבורת גלואה של הפולינום.

הדרכה: תת-חבורת גלואה המקבעת את התת-שדה הריבועי היא ת"ח מאינדקס 2 בחבורת גלואה של הפולינום; ל-$S\_{4}$ ת"ח יחידה מאינדקס 2 (מדוע?); ל-$A\_{4}$ אין ת"ח מאינדקס 2 (מדוע?).
3. נניח $L/F$ הרחבת שדות מממד סופי ו-$K\_{1},K\_{2}$ תתי-שדות ביניים, ונניח כי $K\_{1}/F$ גלואה. הוכיחו:
4. $K\_{1}K\_{2}/K\_{2}$ גלואה
5. יש שיכון $Gal\left(K\_{1}K\_{2}/K\_{2}\right)↪Gal\left(K\_{1}/F\right)$
6. מתקיים: $\left[K\_{1}K\_{2}:K\_{2}\right]=\left[K\_{1}:K\_{1}∩K\_{2}\right]$
7. מתקיים: $Gal\left(K\_{1}K\_{2}/K\_{2}\right)≅Gal\left(K\_{1}/K\_{1}∩K\_{2}\right)$
8. הוכיחו כי $Q\left(ρ\_{24}\right)=Q\left(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{-1}\right)$ (אם אתם משתמשים בחישוב של ערך כלשהו של פונקציה טריגונומטרית, הוכיחו אותו).
9. חשבו את הפולינום המינימלי (מעל $Q$) של $\cos(\left(\frac{360}{7}^{∘}\right))$.

הדרכה: לכל מספר מרוכב מנורמה 1 מתקיים $\overbar{z}=z^{-1}$ ולכן $Re\left(z\right)=\frac{z+z^{-1}}{2}$.

1. (הכנה להמשך) הראו כי אם $G$ חבורה ו-$H\_{1},H\_{2}⊴G$ תתי-חבורות נורמליות שאיחודן יוצר את $G$ ומתקיים: $H\_{1}∩H\_{2}=\left\{e\right\}$ אז $G≅H\_{1}×H\_{2}$.

הדרכה: התבוננו בקומוטטורים של אברים מ-$H\_{1}$ עם אברים מ-$H\_{2}$.