פתרון מבחן מועד ג' קיץ תשפ"ב

1. (21 נק') תהיינה A, B, C קבוצות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $A \setminus B \supseteq A \triangle B$ אז $A \supseteq B$.

(ב) $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$ אם ורק אם $A \triangle B = A \cup B$.

(ג) מתקיים: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

סעיף א':

ננסה להוכיח: צ"ל $B \subseteq A$

יהי $b \in B$ צ"ל $b \in A$

כיוון ש$b \in B$ אזי $b \notin A \setminus B$

מכאן לפי הנתון נובע $b \notin A\Delta B$

כיוון ש$b \in B$ יחד עם העובדה ש $b \notin A\Delta B$ נובע כי $b \in A$ משל.

סעיף ב':

ננסה להוכיח. מדובר בטענת אם ורק אם, עלינו להוכיח בשני הכיוונים.

בכיוון ראשון נניח כי $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$

צ"ל כי $A\Delta B = A \cup B$

נבצע הכלה דו כיוונית

בכיוון ראשון:

יהי $x \in A\Delta B$ צ"ל כי $x \in A \cup B$

לכן $x \in A$ וגם $x \notin B$ או ש$x \in B$ וגם $x \notin A$

מכאן נובע ש $x \in B \vee x \in A$ כלומר $x \in A \cup B$

בכיוון השני, יהי $x \in A \cup B$ צ"ל כי $x \in A\Delta B$

אם $x \in A$ צ"ל כי $x \notin B$ ואז אכן $x \in A\Delta \mathrm{B}$

נב"ש כי $x \in B$

לכן

$\{x\} \in P(A) \cap P(B)$

כי $x \in A \cap B$

בסתירה לנתון (שרק הקבוצה הריקה בחיתוך), והרי $\{x\} \neq \emptyset$

אחרת $x \notin A$ וכיוון ש $x \in A \cup B$ נובע כי $x \in B$

וסה"כ $x \in A\Delta B$

בכיוון השני

נניח כי $A\Delta B = A \cup B$ וצריך להוכיח כי $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$

מובן כי $\emptyset \in P(A) \cap P(B)$ שהרי הקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה.

נב"ש שקיימת $X \neq \emptyset$ כך ש $X \subseteq A$ וגם $X \subseteq B$

ולכן $X \subseteq A \cap B$

קיים $x \in X$ כי אינה ריקה, ולכן $x \in A$ וגם $x \in B$

ולכן $x \in A \cup B$ אבל כמו כן $x \notin A\Delta B$ סתירה.

סעיף ג':

$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

ננסה להוכיח.

יהי $x \in A \setminus (B \setminus C)$ צ"ל כי $x \in (A \setminus B) \setminus C$

נתון $x \in A$ וגם $x \notin B \setminus C$

צ"ל

$x \in A \setminus B$

וגם

$x \notin C$

מה קורה אם יש $x \in A$ כך שגם $x \in B$ ואם בנוסף $x \in C$ אזי הנתון מתקיים ומה שצריך להוכיח לא מתקיים, ומכאן אנו חושדים שמדובר בהפרכה.

לא נתנו עדיין את ההפרכה, ועקרונית הטקסט עד כאן מיותר.

הפרכה: נבחר את הקבוצות

$$A = \{1\} = B = C$$

אכן

$$A \setminus (B \setminus C) = \{1\} \setminus \emptyset = \{1\}$$

אך

$$(A \setminus B) \setminus C = \emptyset \setminus C = \emptyset \neq \{1\}$$

הפרכנו.

2. (12 נק') לכל n טבעי נגדיר יחס S_n על $P(\{1,\ldots,n\})$ כך:

$$S_n = \{(A,B) \mid A \cap B = \emptyset\}$$

הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי $|S_n| = 3^n$.

ראשית בואו נראה מי זה S_1

ראשית נבין מי היא קבוצת האיברים עליה מוגדר היחס

$$P(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

קל לוודא כי (במבחן תכתבו יותר)

$$S_1 = \{(\emptyset, \{1\}), (\{1\}, \emptyset), (\emptyset, \emptyset)\}$$

ואכן $|S_1| = 3$.

זו הייתה הבדיקה.

כעת יהי n עד אליו (כולל) הטענה נכונה, נוכיח עבור $n+1$.

כעת הקבוצה שלנו עליה היחס מוגדר היא

$$P(\{1, \ldots, n, n+1\})$$

אנחנו צריכים להוכיח כי

$$|S_{n+1}| = 3^{n+1}$$

ראשית אפשר להוכיח כי

$$S_n \subseteq S_{n+1}$$

(וצריך במבחן)

מה שמצטרף זה זוגות עם קבוצות שמכילות את $n+1$.

האם ייתכן כי $n+1$ שייך לשתי הקבוצות שבזוג? לא, כי אז החיתוך לא היה ריק.

חשד

נסמן

$$D_L = \{(A \cup \{n+1\}, B) \mid (A, B) \in S_n\}$$

$$D_R = \{(A, B \cup \{n+1\}) \mid (A, B) \in S_n\}$$

נרצה להוכיח את הדברים הבאים:

$$|D_L| = |D_R| = |S_n|$$

$$S_{n+1} = S_n \cup D_L \cup D_R$$

ובנוסף שהחיתוך בין כל שניים ריק.

מכאן נובע כי

$$|S_{n+1}| = 3^n + 3^n + 3^n = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$$

את שלושת הדברים לעיל צריך להוכיח במבחן, אדלג עליהם כאן.

(א) תהי A קבוצה, ויהיו R, S יחסי שקילות על A. הוכיחו: $R \cap S$ יחס שקילות על A.

רפלקסיבי:

יהי $a \in A$ צ"ל $(a,a) \in R \cap S$.

כיוון שR רפלקסיבי (כי זה יחס שקילות) אזי $(a,a) \in R$

כיוון ש S רפלקסיבי (מסיבה דומה) אזי $(a,a) \in S$

ולכן אכן $(a,a) \in R \cap S$

סימטרי וטרנזיטיבי דומים להחריד, במבחן צריך להוכיח.

הערה: למעשה אם D היא קבוצה כך שלכל $X \in D$ מתקיים כי X יחס שקילות על A, לא מסובך להוכיח כי $\bigcap D$ הוא יחס שקילות.

(תרגיל בית)

(ב) נגדיר יחס שקילות R על $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ באופן הבא:

$$(x_1, y_2)\, R\, (x_2, y_2) \iff x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

(אין צורך להוכיח שזהו יחס שקילות). לכל $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ קבעו האם עוצמת מחלקת השקילות $[(x, y)]_R$ היא סופית, $\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph}$ או אחרת. אם היא סופית, מצאו אותה. חלקו למקרים אם צריך.

גאומטרית נתון שנקודות מתייחסות זו לזו אם ורק אם המרחק שלהם מראשית הצירים זהה.

בעצם מחלקת שקילות היא מעגל.

ההבנה הגאומטרית אינה נחוצה לפתרון, אבל עשוייה לעזור אם השגנו אותה.

נתחיל מ$(0,0)$

$$[(0,0)]_R = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2\} = \{(0,0)\}$$

זו מחלקת השקילות הראשונה והיא בגודל 1.

ננסה כעת את

$$[(1,0)]_R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

זה מעגל היחידה

ננחש שגם השאר יוצא מעגל באופן דומה

יהי $(a, b) \neq (0,0)$ ונסמן את $r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$

אז

$$[(a, b)]_R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

זה תמיד מעגל, רק נותר למצוא את העוצמה

$$[(a, b)]_R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

ולכן

$$|[(a,b)]_R| \le |\mathbb{R}\times\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|\cdot|\mathbb{R}| = \aleph\cdot\aleph = \aleph$$

לכיוון השני נבנה פונקציה

$$f:(-r,r)\to[(a,b)]_R$$

$$f(x)=\left(x,\sqrt{r^2-x^2}\right)$$

צריך להוכיח כי f מוגדרת היטב וחח"ע ואזי ינבע

$$|(-r,r)| \le |[(a,b)]_R|$$

ולכן

$$\aleph \le |[(a,b)]_R|$$

סה"כ לפי קנטור-שרדר-ברנשטיין נובע כי

$$|[(a,b)]_R| = \aleph$$

נחזור לפונקציה ונראה מוגדרות היטב:

כיוון ש$x\in(-r,r)$ אכן $r^2-x^2\ge 0$ והשורש מוגדר.

בנוסף, צ"ל כי

$$\left(x,\sqrt{r^2-x^2}\right)\in\underbrace{[(a,b)]_R}_{\text{הטווח}}$$

ואכן

$$a^2+b^2=x^2+\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2$$

וזה נכון כי $a^2+b^2=r^2$.

נותר להוכיח כי הפונקציה חח"ע אבל זה בדיחה!

יהיו x_1,x_2 כך ש

$$\left(x_1,\sqrt{r^2-x_1^2}\right)=\left(x_2,\sqrt{r^2-x_2^2}\right)$$

אזי אכן $x_1=x_2$.

(ג) נגדיר יחס שקילות S על $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$(x_1,y_2)\,S\,(x_2,y_2) \iff x_1=x_2$$

(אין צורך להוכיח שזהו יחס שקילות). לכל $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ קבעו האם עוצמת מחלקת השקילות $[(x,y)]_S$ היא סופית, $\aleph_0,\aleph,2^{\aleph}$ או אחרת. אם היא סופית, מצאו אותה. חלקו למקרים אם צריך.

הפעם זה אפילו קל יותר, קל להוכיח כי

$$[(a,b)]_S=\{\,(a,c)\mid c\in\mathbb{R}\,\}$$

(במבחן צריך להוכיח)

וקל ממש להוכיח כי העוצמה של קבוצה זו היא אלף, פשוט שולחים כל זוג לאיבר הימני וזו פונקציה הפיכה אל הממשיים

(במבחן צריך להוכיח).

(ד) נתבונן ביחס השקילות $R\cap S$ (עבור היחסים R,S משני הסעיפים הקודמים) על $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. לכל $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ קבעו האם עוצמת מחלקת השקילות $[(x,y)]_{R\cap S}$ היא סופית, $\aleph_0,\aleph,2^{\aleph}$ או אחרת. אם היא סופית, מצאו אותה. חלקו למקרים אם צריך.

נסמן $T=R\cap S$

נתחיל מ$[(0,0)]_T$

$$[(0,0)]=\{(x,y)\mid (x,y)R(0,0)\wedge (x,y)S(0,0)\}=$$
$$\{(x,y)\mid x^2+y^2=0\wedge x=0\}=\{(0,0)\}$$

ולכן גודל מחלקת שקילות זו הוא 1.

בואו ננסה להבין מחלקת שקילות כללית עבור $(a,b)\neq(0,0)$

$$[(a,b)]_T=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2=a^2+b^2\wedge x=a\,\}=$$
$$\{\,(x,y)\mid y^2=b^2\wedge x=a\,\}=\{(a,b),(a,-b)\}$$

אם $b=0$ אזי

$$[(a,0)]_T=\{(a,0)\}$$

ושוב מגודל 1

אם $b\neq0$ אזי

$$[(a,b)]_T = \{(a,b),(a,-b)\}$$

וגודל הקבוצה יהיה 2.

4. פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ תיקרא מזגזגת אם מתקיים: לכל n זוגי $f(n)<f(n+1)$, ולכל n אי-זוגי $f(n)>f(n+1)$.

(א) (5 נק') הוכיחו: $f(1)\neq 1$.

(ב) (8 נק') הוכיחו: קיימת $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מזגזגת והפיכה.

(ג) (12 נק') נסמן ב- X את קבוצת הפונקציות מהטבעיים לטבעיים המזגזגות (כלומר, $X=\{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f \text{ מזגזגת}\}$). קבעו האם עוצמת הקבוצה X היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$ או אחרת. אם היא סופית, מצאו אותה.

הערה: מובן כי $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$

סעיף א': נניח כי הפונקציה f בשאלה מזגזגת, אחרת *wtf*?

נב"ש כי $f(1)=1$

כיוון ש f מזגזגת, וכיוון ש1 הוא אי זוגי אזי מהנתון

$$f(1)>f(2)$$

אבל אין מספר טבעי שקטן מאחד, סתירה.

סעיף ב':

הוכיחו – קיימת פונקציה מזגזגת הפיכה.

נתון

$$f(1)>f(2)$$

$$f(2)<f(3)$$

$$f(3)>f(4)$$

וכן הלאה

ננחש

$$f(2)=1$$

$$f(1)=2$$

$$f(4)=3$$

$$f(3) = 4$$

וכך הלאה.

נגדיר את הפונקציה במדויק, נוכיח שהיא מזגזגת, ונוכיח שהיא הפיכה.

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & \text{זוגי } n \\ n+1 & \text{אי זוגי } n \end{cases}$$

ראשית נוכיח זגזוג.

יהי n זוגי צ"ל כי

$$f(n) < f(n+1)$$

אכן

$$n - 1 < n + 2$$

בהנתן n אי זוגי, צ"ל כי

$$f(n) > f(n+1)$$

ואכן

$$n + 1 > n$$

נותר רק להוכיח כי f הפיכה. אפשר להראות חח"ע ועל, ואפשר למצוא את ההופכית.

כאן נראה כי $f \circ f = I$

$$f\big(f(n)\big) =?$$

אם n זוגי

$$f\big(f(n)\big) = f(n-1) = n$$

אם n אי זוגי

$$f\big(f(n)\big) = f(n+1) = n$$

ואכן $f \circ f = I$ והפונקציה הפיכה.

(ג) (12 נק') נסמן ב- X את קבוצת הפונקציות מהטבעיים לטבעיים המזגזגות (כלומר, $X = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f \text{ מזגזגת}\}$). קבעו האם עוצמת הקבוצה X היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$ או אחרת. אם היא סופית, מצאו אותה.

ראשית בודקים את עוצמת הפוטנציאל, כלומר הקבוצה כולה בלי הגבלה.

$$X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

ולכן

$$|X| \leq \aleph_0^{\aleph_0}$$

$$\aleph = 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

ולפי הפרעת ק.ש.ב

$$\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$$

שימו לב:

הפונקציה

$$2,1,2,1,2,1, \ldots$$

מזגזגת

אבל במקום 2 בכל מקום יכלנו לרשום 3.

טענה:

נסמן $A = \{2,3\}$ ונגדיר

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{זוגי } n \\ g(n) & \text{אחרת} \end{cases}$$

אזי אם לכל n מתקיים כי $g(n) \in A$ הפונקציה f מזגזגת (הוכחה קלה, צריך להוכיח במבחן).

נביט בY אוסף הפונקציות מהצורה הזו, ויש התאמה הפיכה קלה (שצריך להוכיח) בין Y לבין

$$\{2,3\}^{2\mathbb{N}+1}$$

אלה הפונקציות g

לכן מתקיים

$$|Y| = \left|\{2,3\}^{2\mathbb{N}+1}\right| = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

וכיוון ש $X \subseteq Y$ אזי

$$|X| \leq \aleph$$

ולפי הפרעת ק.ש.ב נובע כי

$$|X| = \aleph$$

5. (20 נק') קבוצה של קבוצות $X \in P(P(\mathbb{N}))$ תיקרא <u>ריקה באופן בכללי</u> אם מתקיימים התנאים הבאים:
1. $X \neq \emptyset$.
2. לכל $A, B \in X$ מתקיים $A \cap B \neq \emptyset$.
3. $\bigcap\limits_{A \in X} A = \emptyset$

(במילים: X הוא אוסף לא ריק של קבוצות, החיתוך בין כל שתי קבוצות לא ריק, אבל החיתוך הכללי על כל הקבוצות ב-X ריק).

(א) תהי X ריקה באופן כללי, הוכיחו: $|X| \geq 3$.

(ב) תהי X ריקה באופן כללי מקסימלית ביחס ההכלה, הוכיחו כי $\mathbb{N} \in X$.

(ג) תהי X ריקה באופן כללי מקסימלית ביחס ההכלה, הוכיחו כי לכל $A \subseteq \mathbb{N}$ מתקיים כי $A \in X$ או $\mathbb{N} \setminus A \in X$.

הערה: סעיף ד' זה האוסדורף שירד השנה מהחומר.

ראשית עלינו להבין מה זה אומר ש$X \in P\big(P(\mathbb{N})\big)$

זה אומר שX היא קבוצה של איברים מ$P(\mathbb{N})$

כלומר X היא קבוצה של קבוצות מספרים טבעיים.

למשל

$$X = \big\{\{1,3\}, \{2\}, \emptyset\big\}$$

אינה ריקה באופן כללי

ראשית ננסה למצוא דוגמאות לאוסף שעומד בהגדרה.

אם בX יש קבוצה אחת

$$X = \{A\}$$

אזי

$$\bigcap X = A$$

וכן $A \neq \emptyset$ בזכות תכונה 2.

אם בX יש שתי קבוצות

$$X = \{A, B\}$$

אזי $\bigcap X = A \cap B$ ושוב הוא לא יכול להיות ריק כדרוש.

לכן בX יש לפחות 3 קבוצות שונות (הרי אפס נפסלה בגלל 1)

אם בX יש נקודון, אז האיבר שבו חייב להיות בכל הקבוצות ושוב זו בעייה.

$$X = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$$

זו אכן ריקה באופן כללי.

את סעיף א' עשינו קודם לכן, בדיעבד.

סעיף ב': ברור שהכוונה היא מקסימלית מבין הקבוצות הריקות באופן כללי.

כלומר X אינה מוכלת באף קבוצה ריקה באופן כללי <u>אחרת</u>.

צ"ל כי $\mathbb{N} \in X$.

רעיון: נב"ש כי זה לא נכון, ונוכיח כי $Y = X \cup \{\mathbb{N}\}$ היא ריקה באופן כללי שמכילה את X ושונה ממנה בסתירה.

כיצד נוכיח כי Y ריקה באופן כללי? לפי ההגדרה.

תכונה 1: כיוון ש$X \neq \emptyset$ וכן $X \subseteq Y$ אזי $Y \neq \emptyset$

תכונה 2: תהיינה $A, B \in Y$ אם שתיהן לא הטבעיים, אזי $A, B \in X$ ולכן $A \cap B \neq \emptyset$ כיוון שX ריקה באופן כללי.

אם אחת מהן היא הטבעיים, נניח $A = \mathbb{N}$ (האפשרות השנייה דומה)

$$A \cap B = \mathbb{N} \cap B = B$$

נותר כי $B \neq \emptyset$.

אם $B = \emptyset$ אזי $\emptyset \in X$ ולכן $\emptyset, \emptyset \in X$ בסתירה לתנאי 2 שמבטיח כי החיתוך של כל שתי קבוצות בX אינו ריק.

תכונה 3:

$$\bigcap Y = \left(\bigcap X\right) \cap \mathbb{N}$$

בשאלה פחות מאתגרת כנראה הייתי רוצה לראות הוכחה למעבר הזה.

$$X = D \cup E$$

אזי

$$\cap X = (\cap D) \cap (\cap E)$$

(תרגיל נחמד לבית)

במקרה שלנו נקבל

$$\bigcap Y = \left(\bigcap X\right) \cap \mathbb{N} = \bigcap X = \emptyset$$

כי X ריקה באופן כללי.

ולכן Y אכן ריקה באופן כללי.

(ג) תהי X ריקה באופן כללי מקסימלית ביחס ההכלה, הוכיחו כי לכל $A \subseteq \mathbb{N}$ מתקיים כי $A \in X$ או $\mathbb{N} \setminus A \in X$.

רעיון נוכיח כי $Y = X \cup \{A\}$ ריקה באופן כללי או ש $Y = X \cup \{A^C\}$ ריקה באופן כללי.

ואז נסיים באופן דומה לסעיף קודם.

ראשית ברור כי Y לא ריקה, כי X לא ריקה, כמו בסעיף קודם.

כעת תהיינה $B, C \in Y$ צ"ל כי $B \cap C$ אינו ריק.

אם שתיהן הגיעו מX אזי זה ברור. (במבחן תפרטו יותר)

אם $B = C = A$ או $B = C = A^C$ אזי

$$B \cap C = A$$

או

$$B \cap C = A^C$$

אם $A = \emptyset$ או אם אזי $A^C = \mathbb{N}$ וסיימנו בזכות סעיף קודם.

אם $A = \mathbb{N}$ סיימנו לפי סעיף קודם.

אחרת הן A והן A^C אינן ריקות והחיתוך אינו ריק.

כמו כן בדומה לסעיף קודם קל להוכיח כי

$$\cap Y = \emptyset$$

עכשיו נביט במקרה ספציפי, נבדוק האם $Y = X \cup \{A\}$ מקיימת את תנאי 2 במקרה הבודד שנותר

$$B \in X$$

$$C = A$$

ונביט ב

$$B \cap A$$

אם לכל B החיתוך הזה אינו ריק, סיימנו.

אחרת קיימת $B_1 \in X$ כך ש $B_1 \cap A = \emptyset$

באופן דומה ייתכן כי קיימת $B_2 \in X$ כך ש $B_2 \cap A^C = \emptyset$

כיוון

$$B_1 \cap A = \emptyset$$

$$B_1 \subseteq A^C$$

באופן דומה

$$B_2 \subseteq A$$

ולכן

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

סתירה!