

# פתרון תרגיל בית מספר 1

1. הוכיחו את התכונות הבאות של המספרים המרוכבים  $z, z_1, z_2$ :

א.  $\text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2)$ , וכנ"ל עבור  $\text{Im}$ .

$$\text{נסמן } z_1 = a_1 + b_1i \quad z_2 = a_2 + b_2i$$

$$\text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re}((a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i) = a_1 + a_2$$

$$\text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2) = a_1 + a_2$$

ב. זהות המקבילית:  $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ . מהי המשמעות הגיאומטרית?

טריוויאלי: פותחים את אגף שמאל (למשל) ומגיעים לאגף הימני. המשמעות הגיאומטרית היא: סכום ריבועי אלכסוני המקבילית שווה לסכום ריבועי הצלעות.

2. פתרו את המשוואה:  $z^4 + 2 + 2\sqrt{3} \cdot i = 0$

מתקיים  $z^4 = -2 - 2\sqrt{3} \cdot i$ . נעביר את  $-2 - 2\sqrt{3} \cdot i$  להצגה קוטבית:  $-2 - 2\sqrt{3} \cdot i = 4e^{\frac{4\pi i}{3}}$  (שימו לב שיש להוסיף  $\pi$  לזווית, שכן המספר נמצא ברביע השלישי). לפי נוסחת השורשים

מתקיים:  $z = \sqrt[4]{4} e^{\left(\frac{4\pi i + 2\pi k}{4}\right)}$  ולכן ארבעת השורשים הם:  $\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{6}}, \sqrt{2}e^{\frac{5\pi i}{6}}, \sqrt{2}e^{\frac{-2\pi i}{3}}, \sqrt{2}e^{\frac{-\pi i}{6}}$ .

3. חשבו את הביטוי:  $\frac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}$

$$\frac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n (1+i)^2 = \left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^n \cdot 2i = \left(\frac{2i}{2}\right)^n \cdot 2i = 2i^{n+1}$$

$$i^{n+1} = \begin{cases} i & n = 4k \\ -1 & n = 4k + 1 \\ -i & n = 4k + 2 \\ 1 & n = 4k + 3 \end{cases} \quad \text{נשים לב ש } i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1 \text{ כאשר } k \text{ שלם אי שלילי ומכאן:}$$

ולכן

$$\frac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n} = 2i^{n+1} = \begin{cases} 2i & n = 4k \\ -2 & n = 4k + 1 \\ -2i & n = 4k + 2 \\ 2 & n = 4k + 3 \end{cases}$$

4. מצאו  $n, m, z = n + mi$  שלמים כך שמתקיים:  $z^3 = 2 + 11i$  (רמז: היעזרו בנתון ש- $n, m$  שלמים)

יהי  $z = n + mi$ , כאשר  $n, m \in \mathbb{Z}$ . נעלה אותו בחזקה שלישית ונשווה עם הנתון:  
 $(n + mi)^3 = n^3 - 3nm^2 + i(3n^2m - m^3) = 2 + 11i$ . מהשוואת החלקים הממשי והמדומה

$$\text{מקבלים מערכת משוואות: } \begin{cases} n(n^2 - 3m^2) = 2 \\ m(3n^2 - m^2) = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^3 - 3nm^2 = 2 \\ 3n^2m - m^3 = 11 \end{cases} \text{ אם נתבונן}$$

במשוואה הראשונה, נוכל לשים לב כי  $n$  חייב להיות אחד מהמספרים הבאים:  $\pm 1, \pm 2$ .  
 באופן דומה  $m$  חייב להיות אחד מהמספרים הבאים:  $\pm 1, \pm 11$  אבל הפתרון היחידי המקיים את שתי המשוואות יחד הוא:  $n = 2, m = 1$ . (מציבים  $n = 2$  ומקבלים ש- $m = 1$  וכשמציבים  $n = \pm 1, -2$  רואים שאין פתרון שלם מתאים ל- $m$ ).

5. יהא  $n \geq 2$  טבעי, ויהא  $P$  אוסף שורשי היחידה מסדר  $n$ .

א. הוכיחו שקיים  $z \in P$  (כלומר קיים שורש יחידה) כך ש- $P = \{1, z, z^2, \dots, z^{n-1}\}$

ב. הראו שסכום איברי  $P$  הוא אפס. (רמז: סדרה הנדסית)

[תזכורת:  $z \in \mathbb{C}$  הוא שורש יחידה מסדר  $n$  אם  $z^n = 1$ ]

א. נפתור את המשוואה  $z^n = 1$ . מתקיים  $(\text{cis}(\theta))^n = \text{cis}(n\theta) = 1$  ז"א  $n\theta = 2\pi k$  עבור

$$0 \leq k < n \text{ ולכן הפתרונות הם } z_k = \text{cis}\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \text{ עבור } 0 \leq k < n. z_1 \text{ מקיים את}$$

הדרוש (מדוע?).

ב. שימו לב:  $z_1 \neq 1$  ולכן קיבלנו סידרה הנדסית  $1 \neq z_1$ . נשתמש בנוסחה עבור

$$\text{סידרה הנדסית ונקבל: } \sum_{k=0}^{n-1} z_k = \frac{z_1^n - 1}{z_1 - 1} = 0$$

6. תהא נתונה המשוואה  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$  וידוע כי  $a_i$  ממשיים לכל  $0 \leq i \leq n$ .

הוכיחו שאם  $z$  הוא פתרון של המשוואה, אזי גם  $\bar{z}$  (הצמוד המרוכב) הוא פתרון שלה.

נתונה המשוואה  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ . נתון גם כי  $z$  הוא פתרון של

המשוואה ולכן מתקיים  $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ . נפעיל הצמדה על שני האגפים

ונקבל  $\overline{(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0)} = 0$  ולפי תכונות ההצמדה (ואם נשים לב שכל

המקדמים הם ממשיים) נוכל להגיע ל:  $a_n (\bar{z})^n + a_{n-1} (\bar{z})^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ . מכאן

רואים ש- $\bar{z}$  מהווה פתרון למשוואה.

7. הוכיחו את הזהות:  $\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$  (בשימוש משפט דה-מואבר).

מחד, מתקיים:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta \cdot i\sin\theta + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)\end{aligned}$$

מאידך, עפ"י משפט דה – מואבר מתקיים:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$$

לאחר השוואת החלקים המדומים מקבלים:  $\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$ ,  
כנדרש.