

הצעה לפתרון – בוחן במתמטיקה בדידה (88-195) – 15.08.24 (תיכונים)

עדי מכנס

1. (60 נק') תהיינה קבוצות A, B , הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
א. אם $P(A) \cap P(B) \neq \emptyset$ אזי $A \cap B \neq \emptyset$.

פתרון:

הפרכה

נביט בקבוצות הבאות:

$$A = \{17\}$$

$$B = \{42\}$$

לכן:

$$P(A) = \{\emptyset, \{17\}\}$$

$$P(B) = \{\emptyset, \{42\}\}$$

ואכן $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$ אך $A \cap B = \emptyset$.

- ב. אם $A \cap B \neq \emptyset$ אזי $P(A) \cap P(B) \neq \{\emptyset\}$.

פתרון:

הוכחה

כיוון ש $A \cap B \neq \emptyset$, קיים x איבר המקיים ש $x \in A$ וגם $x \in B$. לפיכך, מתקיים כי הקבוצה $\{x\}$

מוכלת גם ב A וגם ב B .

לפיכך, $\{x\} \in P(A)$ וגם $\{x\} \in P(B)$ ולכן $\{x\} \in P(A) \cap P(B)$, מה שאומר כי בוודאות

$$P(A) \cap P(B) \neq \{\emptyset\}$$

משל ■.

- ג. $A \cap B = A \cup B$ אם ורק אם $A = B$.

פתרון:

הוכחה

$\Rightarrow$ נניח ש $A = B$, אזי $A \cap A = A \cup A = A$ (כל איבר ב A שייך ל A , כמה מפתיע!)

נניח כי $A \cap B = A \cup B$. צ"ל $A = B$. נוכיח זאת ע"י הכלה דו כיוונית.

נוכיח הכלה בכיוון אחד, שכן האחר דומה לחלוטין עד כדי שינוי שמות הקבוצות.

יהי $x \in A$. צ"ל $x \in B$. כיוון ש $x \in A$, אזי $x \in A \cup B$. אבל מכיוון שהאיחוד שווה לחיתוך, אזי $x \in A \cap B$. לפיכך, $x \in A$ (שזה ברור) וגם $x \in B$.

משל ■.

2. (40 נק') תהי סדרת קבוצות A_n המקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$ את הפסוק הבא:

$$\forall x \in A_n: [(x \in A_{n-1}) \rightarrow (x \in A_{n-2})]$$

א. יהי $n \geq 3$, הוכיחו או הפריכו: אם $A_{n-1} \subseteq A_n$ אזי $A_{n-1} \subseteq A_{n-2}$.

פתרון:

הוכחה

נניח כי $A_{n-1} \subseteq A_n$. צ"ל ש $A_{n-1} \subseteq A_{n-2}$.

יהי $x \in A_{n-1}$, צ"ל $x \in A_{n-2}$. כעת, כיוון ש $A_{n-1} \subseteq A_n$ אזי $x \in A_n$. לפיכך הפסוק דלעיל מתקיים עבור x , ולפיכך $x \in A_{n-2}$.

משל ■.

ב. הוכיחו את הטענה הבאה. רמז: הוכיחו טענת עזר באינדוקציה.

לכל $n \in \mathbb{N}$ $3 \leq n$ מתקיים כי אם $A_n \cap A_{n-1} \neq \emptyset$ אזי $A_n \cap A_1 \neq \emptyset$.

פתרון:

יהי $n \in \mathbb{N}$ $3 \leq n$. נניח כי $A_n \cap A_{n-1} \neq \emptyset$. צ"ל כי $A_n \cap A_1 \neq \emptyset$.

טענת עזר: תהי A_n כנ"ל ויהי $n \in \mathbb{N}$ $3 \leq n$ כך שקיים x עבורו $x \in A_n$ וגם $x \in A_{n-1}$. אזי $x \in A_1$.

הוכחה: באינדוקציה על n .

בסיס: אכן, עבור $n = 3$ הנ"ל מתקבל מיידית מהפסוק הנתון.

צעד: יהי n עבורו הטענה מתקיימת. צ"ל כי עבור $n + 1$ הטענה מתקיימת גם כן.

נניח שקיים x עבורו $x \in A_{n+1}$ וגם $x \in A_n$. לפיכך, מהפסוק לעיל, שנכון לכל $n \geq 3$ ובפרט עבור $n + 1$, מתקיים כי $x \in A_{n-1}$. לכן מהנחת האינדוקציה, מתקיים כי $x \in A_1$, כפי שרצינו.

משל טענת עזר ■.

כעת, מכיוון ש $A_n \cap A_{n-1} \neq \emptyset$, אזי קיים x כך ש $x \in A_n$ וגם $x \in A_{n-1}$. לכן לפי טענת העזר מתקיים גם ש $x \in A_1$. לפיכך $A_n \cap A_1 \neq \emptyset$, שהרי x שייך לשניהם.

משל ■.