

תרגיל מספר 7

1. נניח ש- $f = u + iv$ היא פונקציה שלמה, הוכיחו ש- f קבועה בכל אחד מהמקרים הבאים

$$\text{א. } u(z) \geq 0 \quad \text{ב. } u(z) \geq v(z) \quad \text{ג. } u(z) \cdot v(z) \geq 0$$

כאשר כל אחד מאי-השוויונים מתקיים לכל $z \in \mathbb{C}$.

2. תהי f פונקציה שלמה המקיימת

$$\limsup_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1$$

הוכיחו שבהכרח f היא פונקציה לינארית מהצורה $az + b$ כאשר $a, b \in \mathbb{C}$.
הדרכה: משפט ליוביל ומשפט קושי לנגזרות.

3. מצאו את כל הפונקציות השלמות f המקיימות את אי השוויון

$$|f(x + iy)| \leq e^x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

4. פתחו את הפונקציות הבאות לטור טיילור סביב הנקודות z הנתונות

$$\text{א. } f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad z = 0, 2$$

$$\text{ב. } f(z) = \cos(\pi(z^2 + 2z)), \quad z = -1$$

$$\text{ג. } f(z) = e^z \sin(z), \quad z = 0, 1$$

5. מצאו את רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של הפונקציות הבאות סביב הנקודות הנתונות

$$\text{א. } f(z) = \frac{1}{1 + z + z^2}, \quad z = i$$

$$\text{ב. } f(z) = \frac{1}{e^z - 1} + \frac{1}{e^{iz} + 1}, \quad z = 1, 3i\pi$$

6. מצאו טור טיילור סביב $z = -1$ לאותו ענף של \sqrt{z} שמקיים $\sqrt{-1} = i$.