<u>פתרון תרגיל מספר 1 במשוואות דיפרנציאליות חלקיות, סמסטר א' תשע"ג:</u>

<u>שאלה 1:</u> פתור את המשוואה $\begin{cases} xu_x+(x+y)u_y=1 \\ u(1,y)=y \end{cases}$ באמצעות שיטת הקווים האופייניים.

פתרון:

מתנאי התחלה מקבלים את הקו ההתחלתי: $(1,s,s)$.

כעת, נסתכל על הקווים האופייניים:

$$\begin{cases} x_t=x \Rightarrow x(t,s)=e^t f_1(s) \\ y_t=x+y \Rightarrow y_t=e^t f_1(s)+y \\ u_t=1 \Rightarrow u(t,s)=t+f_3(s) \end{cases}$$

עבור y מקבלים משוואה דיפרנציאלית רגילה לא הומוגנית מסדר ראשון. למשוואה מהסוג הזה יש נוסחה כללית לפתרון, לכן נרשום את הפתרון של y:

$$y(t,s)=e^{\int dt}\left(\int e^{-\int dx}e^t f_1(s)dt+f_2(s)\right)=e^t\left(f_1(s)t+f_2(s)\right)$$

נציב את הקו ההתחלתי

$$1=x(0,s)=f_1(s)$$
$$s=y(0,s)=f_2(s)$$
$$s=u(0,s)=f_3(s)$$

ונקבל

$$\begin{cases} x(t,s)=e^t \\ y(t,s)=e^t(t+s) \\ u(t,s)=t+s \end{cases}$$

בסה"כ נקבל

$$u(x,y)=\frac{y}{x}$$

<u>שאלה 2:</u> פתור את המשוואה $\begin{cases} (y+u)u_x+yu_y=x-y \\ u(x,1)=1+x \end{cases}$ באמצעות שיטת הקווים האופייניים.

פתרון:

מתנאי ההתחלה מקבלים את הקו ההתחלתי: $(s,1,s+1)$.

כעת, נסתכל על הקווים האופייניים:

$$\begin{cases} x_t=y+u \Rightarrow x_t=e^t f_2(s)+u \\ y_t=y \Rightarrow y(t,s)=e^t f_2(s) \\ u_t=x-y \Rightarrow u_t=x-e^t f_2(s) \end{cases}$$

עבור x ו- u נחבר את שתי המשוואות לקבל

$$x_t + u_t = u + x$$
$$\Downarrow$$
$$(x+u)_t = x + u$$
$$\Downarrow$$
$$x + u = e^t f_3(s)$$

נציב בחזרה בקו האופייני הראשון ונקבל

$$x_t = e^t f_2(s) + e^t f_3(s) - x$$

גם כאן קיבלנו מד"ר לא הומוגנית מסדר ראשון ולכן הפתרון יהיה

$$x(t,s) = e^{-\int dt}\left(\int e^{\int dt} e^t \left(f_2(s) + f_3(s)\right)dt + f_1(s)\right) = e^{-t}\left(\frac{1}{2}e^{2t}\left(f_2(s) + f_3(s)\right) + f_1(s)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}e^t\left(f_2(s) + f_3(s)\right) + e^{-t} f_1(s)$$

נציב את הקו ההתחלתי

$$s = x(0,s) = \frac{1}{2}\left(f_3(s) + f_2(s)\right) + f_1(s)$$
$$1 = y(0,s) = f_2(s)$$
$$s+1 = u(0,s) = \frac{1}{2}\left(f_3(s) - f_2(s)\right) - f_1(s)$$

ולכן $f_1(s) = -1,\ f_2(s) = 1,\ f_3(s) = 2s+1$.

מכאן נקבל

$$\begin{cases} x(t,s) = e^t(s+1) - e^{-t} \Rightarrow x = y(s+1) - \dfrac{1}{y} \Rightarrow x = u - \dfrac{1}{y} + y - \dfrac{1}{y} \\ y(t,s) = e^t \\ u(t,s) = e^t s + e^{-t} \Rightarrow u = ys + \dfrac{1}{y} \Rightarrow s = \dfrac{u}{y} - \dfrac{1}{y^2} \end{cases}$$

ובסה"כ נקבל

$$u = x - y + \frac{2}{y}$$

<u>שאלה 3:</u> פתור את המשוואה $\begin{cases} yu_x - xu_y = 0 \\ u(x,0) = x \end{cases}$ באמצעות שיטת לגרנז'.

פתרון:

ע"פ שיטת לגרנג' נקבל $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x}, c_1 = u$.

מפתירת המד"ר נקבל $c_2 = x^2 + y^2$. לכן, הפתרון הכללי של המשוואה הוא

$$u(x,y) = F\left(x^2 + y^2\right)$$

כעת, נציב את תנאי ההתחלה לקבל $x = u(x,0) = F\left(x^2\right)$. לכן, הפתרון הפרטני של המשוואה הוא

$u(x,y) = sign(x)\sqrt{x^2 + y^2}$ כאשר $sign(x)$ זאת מחזירה את הסימן.

שאלה 4: פתור את המשוואה $\begin{cases} u_y + u^2 u_x = 0 \\ u(x,0) = \sqrt{x} \end{cases}$ באמצעות שיטת לגרנז'.

פתרון:

ע"פ שיטת לגרנג' נקבל $c_1 = u$, $\frac{dx}{u^2} = \frac{dy}{1}$.

כעת, נציב את c_1 במשוואה, נפתור ונקבל $x = c_1^2 y + c_2$. נחזור בחזרה ל- u לקבל $c_2 = x - u^2 y$.

לכן, הפתרון הכללי של המשוואה הוא $u = F\left(x - u^2 y\right)$.

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל $\sqrt{x} = u\left(x,0\right) = F\left(x\right)$. לכן, הפתרון הפרטי הוא $u^2 = \frac{x}{1+y}$.

שאלה 5: נתונה המשוואה $xu_x + yu_y = pu$, $\left(x,y\right) \neq \left(0,0\right)$.

א) מצא פתרון כללי.

ב) עבור $p = -1$ מצא פתרון המקיים $u = x$ על העקום $x^2 + y^2 = 1$.

פתרון:

א) ע"פ שיטת לגרנג' נקבל $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{pu}$.

נתחיל מפתירת המשוואות:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|x| = \ln|y| + c \Rightarrow c_1 = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{pu} \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{p}\ln|u| + c \Rightarrow c_2 = \frac{y}{u^{\frac{1}{p}}}$$

לכן, הפתרון הכללי הוא $u^{\frac{1}{p}} = \frac{y}{F\left(\frac{y}{x}\right)}$.

ב) קודם כל, נציב את הנתון הראשון לקבל $u = \frac{F\left(\frac{y}{x}\right)}{y}$. מהנתון השני מקבלים תנאי התחלה:

$u\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) = x$. נציב את תנאי ההתחלה לקבל $x = u\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) = \frac{F\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)}{\sqrt{1-x^2}}$. כעת, כדי

למצוא את F נגדיר $t = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ונמצא את x לפי t. אחרי חישובים נקבל $x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ ולכן

$F\left(t\right) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\sqrt{1 - \frac{1}{t^2+1}} = \frac{t}{t^2+1}$. נציב בחזרה לקבל

$$u\left(x,y\right) = \frac{\frac{\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}}{y} = \frac{\frac{xy}{x^2+y^2}}{y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

שאלה 6: נתונה המשוואה $yu_x - xu_y = 0$, $y>0$. קבע לכל אחד מן התנאים הנתונים האם קיים פתרון למשוואה, ואם כן פתור.

א) $u(x,0)=x^2$, $-\infty<x<\infty$.

ב) $u(x,0)=|x|$, $-\infty<x<\infty$.

פתרון: קודם כל, נפתור את המשוואה באמצעות שיטת הקווים האופייניים.
הקווים האופייניים:

$$\begin{cases} x_t = y \Rightarrow x_{tt} = y_t \Rightarrow x_{tt} + x = 0 \\ y_t = -x \Rightarrow y_{tt} = -x_t \Rightarrow y_{tt} + y = 0 \\ u_t = 0 \Rightarrow u(t,s) = f_3(s) \end{cases}$$

כעת, נפתור מד"ר מסדר שני עם מקדמים קבועים:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

לכן $x(t,s)=f_1(s)\cos t + f_2(s)\sin t,\ y(t,s)=f_4(s)\cos t + f_5(s)\sin t$. ע"פ הקו האופייני הראשון נקבל $f_4(s)\cos t + f_5(s)\sin t = y(t,s) = x_t = -f_1(s)\sin t + f_2(s)\cos t$ ולכן $f_4(s)=f_2(s),\ f_5(s)=-f_1(s)$. כעת, נציב את הקו ההתחלתי:

$$s = x(0,s) = f_1(s)$$
$$0 = y(0,s) = -f_2(s)$$

לקבל

$$x(t,s) = s\cos t$$
$$y(t,s) = -s\sin t$$

כעת, נבדוק את היעקוביאן

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} x_t & y_t \\ x_s & y_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -s\sin t & -s\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = s\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) = s \neq 0$$

ולכן קיים פתרון.

הפתרונות הפרטיים הם: א) $u(x,y)=x^2+y^2$, ב) $u(x,y)=+\sqrt{x^2+y^2}$.