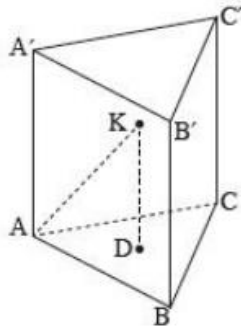


שלום לכולם

בקובץ הזה יש המון תרגילים, אתם לא חייבים לפתור את כולם, אבל מומלץ, תרגיל זה לא להגשה.

2018 חורף



$ABCA'B'C'$  היא מנסרה משולשת ישרה שכל מקצועותיה שווים זה לזה.  
 נסמן את אורך המקצוע ב"  $a$ .  
 $ABCK$  היא פירמידה ישרה.  $DK$  הוא גובה בפירמידה  $ABCK$ , כמתואר בציור.  
 נתון:  $DK = t \cdot AA'$ ,  
 נפח המנסרה  $ABCA'B'C'$  גדול פי 4.5 מנפח הפירמידה  $ABCK$ .

- חשב את  $t$ .
  - מצא את הזווית בין המישור  $ABK$  למישור  $ABC$ .  
 נתון: נפח הפירמידה  $ABCK$  הוא  $12\sqrt{3}$ .
  - מצא את  $a$ .
- נתון: הקודקוד  $A$  נמצא בראשית הצירים, הקודקוד  $A'$  נמצא על החלק החיובי של ציר ה"  $z$ ,  
 והקודקוד  $C$  נמצא על החלק החיובי של ציר ה"  $y$ .  
 שיעורי הקודקוד  $B$  הם חיוביים.
- מצא את שיעורי הקודקוד  $B'$ .
  - מצא את משוואת המישור  $AB'K$ .  
 תוכל להשאיר שורש בתשובתיך.

### תרגילים עם פרמטרים – הזווית בין ישר למישור

- 26** נתונים הישר  $\underline{x} = (1, -1, 0) + t(3, 4, 5)$  והמישור  $7x + y + kz - 5 = 0$ .  
 א. מצא לאילו ערכי  $k$  הזווית בין הישר למישור היא  $30^\circ$ .  
 ב. אחד מהמישורים שמתקבל עבור אחד מערכי  $k$  שמצאת בסעיף א' הוא מקביל לאחד מהצירים. מצא את נקודת החיתוך של הישר שעובר דרך ראשית הצירים עם מישור זה, אם נתון שהישר מאונך למישור זה.
- 27** המישור  $\pi$  עובר דרך הנקודות  $A(0, k, 0)$ ,  $B(0, 0, 1)$ ,  $C(1, -2, 0)$ .  
 א. מצא (בעזרת  $k$ ) את משוואת המישור  $\pi$ .  
 ב. מצא לאילו ערכי  $k$  סינוס הזווית שבין הישר  $\underline{x} = (0, 2, 1) + t(1, 2, 0)$  למישור  $\pi$  הוא  $\frac{2}{5}$ .

**לסיכום:**

הזווית  $\alpha$  שבין המישורים  $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$  ו- $\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$  מקיימת:

$$\cos \alpha = \frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2} \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

**מסקנה:**

שני המישורים הנ"ל ניצבים זה לזה אם ורק אם:  $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 = 0$ .

בצורה דומה, לגבי שני ישרים במישור נקבל:

הזווית  $\alpha$  בין הישרים  $\ell_1: a_1x+b_1y+c_1 = 0$  ו- $\ell_2: a_2x+b_2y+c_2 = 0$  מקיימת:

$$\cos \alpha = \frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2} \sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

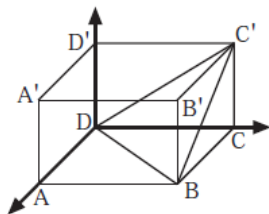
חשב את הזווית שבין המישורים הבאים:

- |                      |                     |                      |
|----------------------|---------------------|----------------------|
| $5x-2y+3z+1 = 0$ (3) | $3x+4y-z-5 = 0$ (2) | $2x-3y+5z-2 = 0$ (1) |
| $4x+7y-2z-4 = 0$     | $2x+y-3z+2 = 0$     | $x-y+z = 0$          |
| $z-3 = 0$ (6)        | $2x-5y-7 = 0$ (5)   | $7x-20y+z+3 = 0$ (4) |
| $y-z-8 = 0$          | $3x-z-2 = 0$        | $3x+5y+4z = 0$       |

**תרגילים עם פרמטרים – הזווית בין שני מישורים**

מצא לאילו ערכי  $k$  המישורים הבאים ניצבים זה לזה:

- |                           |                     |
|---------------------------|---------------------|
| $kx-(k+1)y+4z-5 = 0$ (13) | $3x-ky+kz = 0$ (12) |
| $(2k+1)x+ky-z+2 = 0$      | $2x+5y-kz-3 = 0$    |



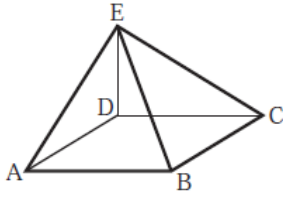
**צורות מרחביות – הזווית בין שני מישורים**

- (16) בתיבה שבצירי נתון:  $A(2,0,0)$ ,  $C(0,5,0)$ ,  $D(0,0,0)$ ,  $D'(0,0,3)$ .

חשב את הזווית שבין המישור  $BDC'$  למישורים:  
א.  $BDC$ . ב.  $BDA'$ .

א. מצא את  $k$ .  
ב. מצא את משוואת המישור  $\pi_2$  עבור ה- $k$  הגדול מבין השניים שמצאת בסעיף א.

קוסינוס הזווית שבין המישורים  $\pi_1$  ו- $\pi_2$  הוא  $\frac{1}{3}$ .



20) בפירמידה ABCDE, שבסיסה ABCD הוא מלבן, המקצוע DE

ניצב לבסיס. נתון:  $AD = 3$ ,  $DC = 5$ ,  $DE = 4$ .

א. חשב את הזווית בין המישור EBC למישור AEB.

ב. חשב את הזווית שבין הישר DE למישור EBC.

(הערה: נסה לחשב את הזווית המבוקשת גם בעזרת טריגונומטריה במרחב, מבלי להיעזר בווקטורים).

### מציאת משוואות של מישורים – הזווית בין שני מישורים

24) מצא את משוואת המישור הניצב למישורים  $3x - y + z - 2 = 0$ ,  $x + y - 2z - 5 = 0$  והעובר בנקודה  $(4, 2, -3)$ .

25) א. מצא את משוואת המישור המאונך למישור  $2x - 3y + z - 5 = 0$  והעובר דרך הנקודות  $A(1, 2, -3)$  ו-  $B(2, 0, -1)$ .  
 ב. מצא הצגה פרמטרית של הישר שהוא אנך אמצעי לקטע AB והוא מוכל במישור שמצאת בסעיף א'.

26) נתונים הישר  $\ell: \underline{x} = (2, 0, -2) + t(0, 1, 1)$  והמישור  $\pi: 2x + 4y - z - 5 = 0$ . מצא את משוואת המישור העובר דרך הישר  $\ell$  והניצב למישור  $\pi$ .

$\frac{ ax_1 + by_1 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$	מרחק הנקודה $(x_1, y_1)$ מהישר $ax + by + c = 0$ הוא:
--	---

המרחק $ \overrightarrow{X_0 X_1} $ שהוא מרחק הנקודה $X_1$ מהישר $\underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$ הוא:
$ \overrightarrow{X_0 X_1}  = \sqrt{ \overrightarrow{X_1 X_2} ^2 - \frac{ \underline{u} \cdot \overrightarrow{X_1 X_2} ^2}{ \underline{u} ^2}}$
כאשר $X_2$ היא נקודה כלשהי על הישר.

קודריו של משולש ABC הם  $A = (-1, 2, 1)$ ,  $B = (3, 0, 1)$ ,  $C = (4, -1, 3)$ .  
 א. מצא את הגובה לצלע BC.  
 ב. חשב את שטח המשולש ABC.

מצא בתרגילים הבאים את מרחק הנקודה A מהישר הנתון:

- |  |  |
|--|--|
| <p>(2) <math>\underline{x} = (-2, 1, -1) + t(3, 0, 1)</math><br/> <math>A = (3, 4, -6)</math></p>  | <p>(1) <math>\underline{x} = (-1, -3, 2) + t(3, 2, -2)</math><br/> <math>A = (4, -3, 1)</math></p> |
| <p>(4) <math>\underline{x} = (4, 0, -1) + t(3, -1, -2)</math><br/> <math>A = (3, -3, 6)</math></p> | <p>(3) <math>\underline{x} = (0, -5, -5) + t(2, 6, 1)</math><br/> <math>A = (-7, 3, 2)</math></p>  |

**תרגילים עם פרמטרים – מרחק נקודה מישר במרחב**

**17** מרחק הנקודה  $(4, k, 2)$  מהישר  $\underline{x} = (3, 1, -2) + t(2, -1, 2)$  הוא 3. מצא את  $k$ .

**18** מרחק הנקודה  $A(k, 1, k+1)$  מהישר  $\underline{x} = (0, 1, -1) + t(0, 1, 2)$  הוא 2.  
 א. מצא את  $k$ .  
 ב. מצא, עבור ה- $k$  השלם שמצאת בסעיף א', את הנקודה על הישר שהיא הקרובה ביותר לנקודה  $A$ .

**תרגילים נוספים – מרחק נקודה מישר במרחב**

**19** מצא את הנקודה על ציר ה- $x$  שנמצאת במרחקים שווים מהנקודה  $(5, -2, 1)$  ומהישר  $\underline{x} = (1, -1, 2) + t(0, 2, 1)$ .

מרחק הנקודה  $(x_1, y_1, z_1)$  מהמישור  $ax+by+cz+d = 0$  הוא:

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

חשב את מרחק הנקודה  $A$  מהמישור שמשוואתו נתונה:

- |   |  |   |
|---|--|---|
| <p><b>(3)</b> <math>10x-15y-6z+1 = 0</math><br/> <math>A = (1, -1, -2)</math></p> | <p><b>(2)</b> <math>6x-7y+6z = 0</math><br/> <math>A = (5, -2, 0)</math></p> | <p><b>(1)</b> <math>2x-y+2z+3 = 0</math><br/> <math>A = (3, -1, 4)</math></p>   |
| <p><b>(6)</b> <math>z-3 = 0</math><br/> <math>A = (1, 2, 0)</math></p>            | <p><b>(5)</b> <math>3x+y-20 = 0</math><br/> <math>A = (0, -1, 3)</math></p>  | <p><b>(4)</b> <math>4x-5y+2z+7 = 0</math><br/> <math>A = (-5, 6, -1)</math></p> |

- (29) א. מצא את שתי הנקודות על הישר  $\underline{x} = (-1, -2, 0) + t(-3, 1, 2)$  שמרחקן מהמישור  $x - 2y - 2z + 3 = 0$  הוא 5.  
ב. מצא, בעזרת התשובה לסעיף א' בלבד, את נקודת החיתוך של הישר והמישור הנ"ל.  
נמק את תשובתך.

- (30) א. מצא על הישר  $\ell: \underline{x} = (0, -1, 0) + t(-1, 1, 0)$  את הנקודה שנמצאת במרחקים שווים מהמישור  $\pi: 7x - 2y - z - 2 = 0$  ומהנקודה  $(0, -2, 1)$ .  
ב. נסמן ב-A את הנקודה שמצאת בסעיף א'. נסמן ב-B את נקודת החיתוך של האנך מ-A למישור  $\pi$  עם המישור  $\pi$ . נסמן ב-C את נקודת החיתוך של הישר  $\ell$  עם המישור  $\pi$ . ענה על הסעיפים הבאים מבלי למצוא את הנקודה B:  
(1) מצא את המרכז והרדיוס של המעגל שחוסם את המשולש ABC. נמק את תשובתך.  
(2) מצא את שטח המשולש ABC.  
(3) מצא את זוויתו של המשולש ABC.