הוראות: יש לענות על כל השאלות, כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

1. (30 נק') תהי סדרה אי שלילית $0 \le a_n$. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

בכיוון ראשון, נניח כי $\sum a_n$ מתכנס.

$$\frac{a_n}{1+a_n} \le a_n$$

ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון לטורים חיוביים גם $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

בכיוון שני, נניח כי $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

לכן $\frac{a_n}{1+a_n} \to 0$

לכן

$$\frac{1}{1+a_n} = \frac{1+a_n}{1+a_n} - \frac{a_n}{1+a_n} = 1 - \frac{a_n}{1+a_n} \to 1$$

כלומר

$$\frac{\left(\frac{a_n}{1+a_n}\right)}{a_n} \to 1$$

ולכן הטורים חברים, וגם הטור $\sum a_n$ מתכנס.

2. נביט בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n - \sin(n)}$$

א. (20 נק') קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, והוכיחו את תשובתכם.

נבדוק את טור הערכים המוחלטים, ונשווה אותו לטור ההרמוני

$$\frac{\left|\frac{(-1)^n}{2n-\sin(n)}\right|}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\left|2 - \frac{\sin(n)}{n}\right|} \to \frac{1}{2}$$

לכן הטורים חברים, כלומר טור הערכים המוחלטים מתבדר, ולכן הטור בשאלה לא מתכנס בהחלט.

ב. (20 נק') הוכיחו כי הטור מתכנס.

נשים לב כי

$$\frac{(-1)^n}{2n-\sin(n)}=\frac{(-1)^n}{2n-\sin(n)}-\frac{(-1)^n}{2n}+\frac{(-1)^n}{2n}$$

הטור

$$\sum\frac{(-1)^n}{2n}$$

מתכנס כי מדובר בטור לייבניץ

נוכיח כי גם הטור השני מתכנס, ולכן הטור בשאלה מתכנס בסכום של מתכנסים.

$$\left|\frac{(-1)^n}{2n-\sin(n)}-\frac{(-1)^n}{2n}\right|=\left|\frac{2n-(2n-\sin(n))}{2n(2n-\sin(n))}\right|=\left|\frac{\sin(n)}{4n^2-2n\sin(n)}\right|\leq\frac{1}{|4n^2-2n\sin(n)|}$$

נבצע מבחן השוואה עם הטור $\sum\frac{1}{n^2}$ (שהוא מתכנס כמובן)

$$\frac{\frac{1}{|4n^2-2n\sin(n)|}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{\left|4-\frac{2\sin(n)}{n}\right|}\to\frac{1}{4}$$

כלומר טור הערכים המוחלטים חברים של הטור הזה, ולכן הטור השמאלי מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס, כפי שרצינו.

3. נביט בסדרת הפונקציות $f_n(x)=x^n-x^{2n}$

א. (25 נק') קבעו אם סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש בקטע $[0,1]$

עבור $x\in[0,1)$ מתקיים כי $f_n(x)=x^n-x^{2n}\to 0$

עבור $x=1$ נקבל כי $f_n(1)=0$

ולכן סה"כ פונקצית הגבול $f(x)$ היא הפונקציה הקבועה אפס בתחום הנתון.

נחשב את סדרת החסמים

$$d_n=\sup_{[0,1]}|x^n-x^{2n}-0|$$

נחקור את הפונקציה

$$h(x) = x^n - x^{2n}$$

$$h'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = nx^{n-1}(1 - 2x^n)$$

ולכן המאפסים של הנגזרת הם $x = 0, x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

כמו כן, הקיצון יכול להתחבא בקצוות, ולכן גם $x = 1$ חשודה.

נציב את כל החשודות בפונקציה

$$h(x) = x^n(1 - x^n)$$

$$h(0) = h(1) = 0$$

$$h\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

ולכן לכל n מתקיים כי $d_n = \frac{1}{4}$ ולכן סדרת החסמים אינה מתכנסת לאפס, ולכן סדרת הפונקציות <u>אינה</u> מתכנסת במ"ש בקטע

ב. (25 נק') קבעו אם סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש בקטע $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

רוב החישובים בסעיף זה נובעים ישירות מסעיף קודם פרט להבדל חשוב.

הנקודה החשודה שמצאנו $\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in [0,1]$ אבל לכל $n > 1$ מתקיים כי $\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \notin \left[0, \frac{1}{2}\right]$

לכן הנקודות החשודות הן רק הקצוות

$$h(0) = 0$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

ולכן הפעם

$$d_n = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \to 0$$

והסדרה <u>כן</u> מתכנסת במ"ש.