<u>מתמטיקה בדידה – תרגיל 1</u>

1. (15 נק') מהי טבלת האמת של הביטויים:

א. $(a \to b) \wedge (\neg a \to b)$

ב. $(a \leftrightarrow b) \vee (\neg a \leftrightarrow \neg b)$

ג. $(\neg a \leftrightarrow \neg b) \leftrightarrow (\neg a \leftrightarrow b)$

<u>פתרון:</u>

א.

a	b	¬a	a → b	¬a → b	**(a → b) ∧ (¬a → b)**
T	T	F	T	T	**T**
T	F	F	F	T	**F**
F	T	T	T	T	**T**
F	F	T	T	F	**F**

ב.

a	b	¬a	a ↔ b	¬a ↔ b	**(a ↔ b) ∨ (¬a ↔ b)**
T	T	F	T	F	**T**
T	F	F	F	T	**T**
F	T	T	F	T	**T**
F	F	T	T	F	**T**

ג.

a	b	¬a	¬b	¬a ↔ ¬b	¬a ↔ b	**(¬a ↔ ¬b) ↔ (¬a ↔ b)**
T	T	F	F	T	F	**F**
T	F	F	T	F	T	**F**
F	T	T	F	F	T	**F**
F	F	T	T	T	F	**F**

2. (20 נק') הוכח או הפרך בעזרת טבלאות אמת את השקילות של הפסוקים:

א. $(a \wedge b) \to a \equiv a \to (b \to a)$

ב. $a \wedge \neg(b \vee c) \equiv (a \wedge \neg b) \wedge (a \wedge \neg c)$

ג. $a \leftrightarrow b \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg c)$

ד. $(a \to b) \to c \equiv a \to (b \to c)$

<u>פתרון:</u>

א. שני הפסוקים הם טאוטולוגיה ולכן שקולים.

a	b	a ∧ b	**(a ∧ b) → a**	b → a	**a → (b → a)**
T	T	T	**T**	T	**T**
T	F	F	**T**	T	**T**
F	T	F	**T**	F	**T**
F	F	F	**T**	T	**T**

ב. שני הפסוקים מקבלים אותם ערכים לוגיים ולכן שקולים.

a	b	c	¬b	¬c	b∨c	¬(b∨c)	**a∧¬(b∨c)**	a∧¬b	a∧¬c	**(a∧¬b)∧(a∧¬c)**
T	T	T	F	F	T	F	**F**	F	F	**F**
T	T	F	F	T	T	F	**F**	F	T	**F**
T	F	T	T	F	T	F	**F**	T	F	**F**
T	F	F	T	T	F	T	**T**	T	T	**T**
F	T	T	F	F	T	F	**F**	F	F	**F**
F	T	F	F	T	T	F	**F**	F	F	**F**
F	F	T	T	F	T	F	**F**	F	F	**F**
F	F	F	T	T	F	T	**F**	F	F	**F**

ג. שני הפסוקים לא מקבלים תמיד את אותם ערכים לוגיים ולכן שקולים.

a	b	c	¬a	¬c	a∧b	¬a ∧ ¬c	**(a∧b) ∨ (¬a ∧ ¬c)**	**a↔b**
T	T	T	F	F	T	F	**T**	**T**
T	T	F	F	T	T	F	**T**	**T**
T	F	T	F	F	F	F	**F**	**F**
T	F	F	F	T	F	F	**F**	**F**
F	T	T	T	F	F	F	**F**	**F**
F	T	F	T	T	F	T	**T**	**F**
F	F	T	T	F	F	F	**F**	**T**
F	F	F	T	T	F	T	**T**	**T**

ד. שני הפסוקים לא מקבלים תמיד את אותם ערכים לוגיים ולכן שקולים.

a	b	c	a → b	**(a → b) → c**	b → c	**a → (b → c)**
T	T	T	T	**T**	T	**T**
T	T	F	T	**F**	F	**F**
T	F	T	F	**T**	T	**T**
T	F	F	F	**T**	T	**T**
F	T	T	T	**T**	T	**T**
F	T	F	T	**F**	F	**T**
F	F	T	T	**T**	T	**T**
F	F	F	T	**F**	T	**T**

3.

כתבו את הטענות הבאות כפסוקים. כאשר מכמתים, הכימות הוא על כל האנשים והשמות ביחד.
1. לכל איש יש שם
2. אם קיים איש עם שם יחיד אז לא קיים איש ללא שם

<u>פיתרון:</u>
1. $\forall x \exists Y : Y(x)$
2. $\exists x : \exists! Y : Y(x) \to \neg\exists x : \forall Y \neg Y(x) \equiv \exists x \exists! Y : Y(x) \to \forall x \quad Y(x)$

4. נניח $\mathbb{Z}$ קבוצה של מספרים שלמים. אזי ניקח: $A=\{2m+1 \mid m\in\mathbb{Z}\}\supseteq\mathbb{Z}$, $B=\{2m+3 \mid m\in\mathbb{Z}\}\supseteq\mathbb{Z}$. הוכיחו: $A=B$.

<u>הוכחה:</u>
(1 נניח $x\in A$ <= $x=2m+1$ <= $x=2(m-1)+3$, $m\in\mathbb{Z}$ ו- $n=m-1 \in \mathbb{Z}$ <= $x=2n+3$ <= $x\in B$.
(2 נניח $x\in B$ <= $x=2m+3$ <= $x=2(m+1)+1$, $m\in\mathbb{Z}$ ו- $n=m+1 \in \mathbb{Z}$ <= $x=2n+1$ <= $x\in A$. $\blacksquare$

5. הוכיחו (לפי ההגדרה): $A\triangle B = A\triangle C \Rightarrow B=C$
<u>הוכחה:</u> $x\in B$, צ"ל $x\in C$.
$x\in B$ <= קיימים שני מקרים: (1) $x\in B$ ו- $x\in A$ **<u>או</u>** (2) $x\in B$ ו- $x\notin A$.
(1). $x\notin A\setminus B$ ו- $x\notin B\setminus A$ <= $x\notin A\triangle B$ <= $x\notin A\triangle C$ <= $x\in C$
(2). $x\in B\setminus A$ <= $x\in A\triangle B$ <= $x\in A\triangle C$ <= $x\in C$

6. הראו כי: $A\cap B=\varnothing \;\Leftrightarrow\; A\triangle B = A\cup B$

<u>הוכחה:</u> כיוון (=>): $A\cap B=\varnothing \Rightarrow$ $x\in A\cup B \Rightarrow x\in A\triangle B \Rightarrow \begin{matrix} x\in A, x\notin B \\ x\notin A, x\in B \end{matrix}$

כיוון (<=):

$$A \triangle B = \left(A \setminus B\right) \bigcup \left(B \setminus A\right) = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C) =_{(distr.law)} =$$

$$= \left((A \cap B^C) \cup B\right) \cap \left((A \cap B^C) \cup A^C\right) =_{(distr.law)} =$$

$$= \left((A \cup B) \cap (B^C \cup B)\right) \cap \left((A \cup A^C) \cap (A^C \cup B^C)\right) =$$

$$= \left((A \cup B) \cap \mathbf{U}\right) \cap \left(\mathbf{U} \cap (A^C \cup B^C)\right) = (A \cup B) \cap (A^C \cup B^C) =_{(de-morgan.law)} =$$

$$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^C =_{(A \cap B = \varnothing)} = (A \cup B) \cap \mathbf{U} = A \cup B$$