

תרגיל 5 בפונקציות מרוכבות

1. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות הסגורות הן נגד כיוון השעון)

(א)

$$\int_{|z-1|=1} \frac{(z+1)^7}{z-1} dz$$

(ב)

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$$

(ג)

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z-1)(z+1)} dz$$

כאשר $\gamma(t) = it \quad -1 \leq t \leq 1$

(ד)

$$\int_{|z|=5} \frac{e^{tz}}{z^2+1} dz$$

כאשר $t \in \mathbb{R}$

2. יהי $k \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי

$$\int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} \cos(k \sin \theta) d\theta = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} \sin(k \sin \theta) d\theta = 0$$

רמז: חשבו את

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z} dz$$

3. נגדיר פונקציה בתחום $|z| < 3$ לפי

$$f(z) = \int_{|w|=3} \frac{3w^2 + 7w + 1}{w - z} dw$$

מצאו את $f'(1+i)$.

4. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות

(א) אם לכל z מתקיים $f(z) = f(iz)$ אז f קבועה.

(ב) אם לכל z מתקיים $f(z) = f(3z)$ אז f קבועה.

5. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת $|f(z) - f(2z)| \leq 10$, הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.