פיסיקה למתמטיקאים

המשפט הויריאלי

המשפט הויריאלי:
נתון המילטוניאן מהצורה $H=\frac{p^2}{2m}+\lambda x^n=T+V$. אזי מתקיים $2\langle T\rangle=n\langle V\rangle$.
הוכחה: נחשב תחילה את הקומוטטור $[H,xp]$.

$$[H,xp]=[\frac{p^2}{2m}+\lambda x^n,xp]=\frac{1}{2m}[p^2,xp]+\lambda[x^n,xp]=\frac{1}{2m}[p^2,x]p+\lambda x[x^n,p],$$

כאשר בשוויון האחרון נעזרנו בזהות $[A,BC]=B[A,C]-[A,B]C$. כעת, ע"י שמוש בזהות $[A,B^n]=nB^{n-1}[A,B]$ כאשר $[B,[A,B]]=0$, ולכן $[x^n,p]=nx^{n-1}[x,p]$ כאשר $[p,[x,p]]=0$, נקבל

$$[H,xp]=-\frac{1}{2m}[x,p^2]p+\lambda xnx^{n-1}[x,p]=$$

$$=\left(-2\frac{p^2}{2m}+\lambda nx^n\right)[x,p]=(-2T+nV)i\hbar,$$

כאשר בחישוב הקומוטטור $[x,p^2]$ נעזרנו שנית בזהות $[A,BC]=B[A,C]-[A,B]C$, ו $[x,p]=i\hbar$.
כעת, נראה כי $\langle[H,xp]\rangle=0$.
נניח כי $\{|n\rangle\}$ קבוצת המצבים העצמיים של H, בהצגת האנרגיה, עם ערכים עצמיים E_n. אזי לכל n

$$\langle[H,xp]\rangle=\langle n|[H,xp]|n\rangle=\langle n|Hxp|n\rangle-\langle n|xpH|n\rangle=$$

$$=\langle n|E_nxp|n\rangle-\langle n|xpE_n|n\rangle=E_n\langle n|xp|n\rangle-E_n\langle n|xp|n\rangle=0,$$

ולכן

$$\langle[H,xp]\rangle=(-2\langle T\rangle+n\langle V\rangle)i\hbar=0,$$

וסיימנו.