<u>תרגיל בית מספר 5</u>

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(z)=\log\left(z^2+1\right)$ כאשר $\log$ מסמן את הענף העיקרי של הלוגריתם.

<u>פתרון</u>: הענף העיקרי $\log$ איננו מוגדר עבור ערכים ממשיים אי חיוביים. לכן f איננה מוגדרת כאשר המספר $w=z^2+1$ הוא ממשי ואי חיובי. כלומר f איננה מוגדרת אם קיים λ ממשי כך ש-$z^2+1=-\lambda^2$. לכן אם נסמן $z=x+iy$ אז נקבל ש-f לא מוגדרת אם x ו- y מקיימים את המשוואה

$$x^2-y^2+1+2ixy=(x+iy)^2+1=z^2+1=-\lambda^2.$$

לכן מהשוואת החלקים הממשיים והמדומים נקבל

$$x^2-y^2+1=-\lambda^2,\ 2xy=0.$$

מהמשוואה $2xy=0$ נקבל ש- $x=0$ או $y=0$. אם $x=0$ אז מהמשוואה $x^2-y^2+1=-\lambda^2$ נקבל $x^2=-1-\lambda^2$ וזה כמובן לא ייתכן. אם $x=0$ אז מהמשוואה $x^2-y^2+1=-\lambda^2$ נקבל $y^2=1+\lambda^2$, או $y=\pm\sqrt{1+\lambda^2}$. כיוון ש-λ הוא מספר ממשי כלשהו נובע ש-$y\le -1$ או $y\ge 1$. לכן f מוגדרת בכל המישור $\mathbb{C}$ פחות שתי הקרניים

$$\{z=x+iy : x=0, y\le -1\}$$

$$\text{ו} -\ \{z=x+iy : x=0, y\ge 1\}$$

2. חשבו את המספרים הבאים

א. $z=(1+i)^i$ ב. $z=(-i)^{-i}$ ג. $z=\Re\left((1-i)^{1+i}\right)$

<u>פתרון</u>:

א. $$(1+i)^i=e^{i\cdot\ln(1+i)}=e^{i\cdot\left(\ln|1+i|+i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right)}=e^{i\left(\ln\sqrt{2}+2\pi ik+i\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=e^{i\ln\sqrt{2}-2\pi k-\frac{\pi}{4}}, k\in\mathbb{Z}.$$

ב. $$(-i)^{-i}=e^{-i\cdot\ln(-i)}=e^{-i\cdot\left(i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)}=e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}, k\in\mathbb{Z}.$$

ג. $\Re\left((1-i)^{1+i}\right)=\Re\left(e^{(1+i)\ln(1-i)}\right)=\Re\left(e^{(1+i)\left(\ln|1-i|+i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right)}\right)$

$$=\Re\left(e^{(1+i)\left(\ln\sqrt{2}-\frac{i\pi}{4}+2\pi ik\right)}\right)=\Re\left(e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k+i\left(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}\right)$$

$$=e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k}\cos\left(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right),k\in\mathbb{Z}.$$

3. א. הוכיחו כי אם $\log_1$ ו־ $\log_2$ הם שני ענפים של הלוגריתם ואם z הוא מספר הנמצא בתחום ההגדרה של שני ענפים אלו, אז קיים k שלם (התלוי ב־z) כך ש־

$$\log_2(z)=\log_1(z)+2\pi ik.$$

ב. נניח ש־$\log$ הוא ענף של הלוגריתם ו־z_1,z_2 הם שני מספרים מרוכבים כך ש־z_1, z_2 ו־$z_1\cdot z_2$ נמצאים בתחום ההגדרה של ענף זה. האם בהכרח מתקיים

$$\log(z_1\cdot z_2)=\log(z_1)+\log(z_2)$$

פתרון: א. אם $\log_1$ ו־ $\log_2$ הם שני ענפים של הלוגריתם ו־ z נמצא בתחום ההגדרה של שני הענפים אז

$$e^{\log_1(z)}=e^{\log_2(z)}=z$$

אבל אם z ו־w הם שני מספרים מרוכבים כך ש־

$$e^z=e^w$$

אז

$$e^{z-w}=1$$

ובתרגול הוכחנו שהמשוואה האחרונה מתקיימת רק אם

$$z-w=2\pi ik\Rightarrow z=w+2\pi ik.$$

בפרט במקרה שלנו נקבל ש־

$$\log_2(z)=\log_1(z)+2\pi ik.$$

ב. נראה שהמשוואה

$$\log(z_1 \cdot z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$$

לא בהכרח מתקיימת. נבחר את $\log$ להיות הענף העיקרי וניקח $z_1 = z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$. אז

$$\log(z_1) + \log(z_2) = \log\left(e^{\frac{3i\pi}{4}}\right) + \log\left(e^{\frac{3i\pi}{4}}\right) = i\frac{3\pi}{4} + i\frac{3\pi}{4} = i\frac{3\pi}{2}.$$

מצד שני

$$\log\left(e^{\frac{3i\pi}{4}} \cdot e^{\frac{3i\pi}{4}}\right) = \log\left(e^{\frac{3i\pi}{2}}\right) = -i\frac{\pi}{2}.$$

4. חשבו $\int_\gamma \overline{z} e^{\overline{z}} dz$ כאשר γ היא המסילה המורכבת מהישרים מ־$z = i$ ל־$z = 0$ ומ־$z = 0$ ל־$z = 1$.

פתרון: המסילה γ מורכבת מהמסילות $\gamma_1(t) = i(1-t), 0 \le t \le 1$ ו־$\gamma_2(t) = t, 0 \le t \le 1$. לכן

$$\int_\gamma \overline{z} e^{\overline{z}} dz = \int_{\gamma_1} \overline{z} e^{\overline{z}} dz + \int_{\gamma_2} \overline{z} e^{\overline{z}} dz$$

$$= \int_0^1 \overline{i(1-t)} e^{\overline{i(1-t)}} \left(i(1-t)\right)' dt + \int_0^1 \overline{t} e^t t' dt$$

$$= \int_0^1 -i(1-t) e^{-i(1-t)} (-i) dt + \int_0^1 t e^t dt$$

באינטגרל הראשון נבצע החלפת משתנים $s = 1 - t, ds = -dt$ ונקבל

$$\int_\gamma \overline{z} e^{\overline{z}} dz = -\int_0^1 s e^{-is} ds + \int_0^1 t e^t dt$$

$$= -\int_0^1 is \left(e^{-is}\right)' ds + \int_0^1 t \left(e^t\right)' dt$$

$$= -\left(ise^{-is}\Big|_{s=0}^{s=1} - i \int_0^1 e^{-is} ds \right) + te^t\Big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 e^t dt$$

$$= -\left(ie^{-i} - i \left.\frac{e^{-is}}{-i}\right|_{s=0}^{s=1} \right) + e - e^t\Big|_{t=0}^{t=1}$$

$$= -\left(ie^{-i} + e^{-i} - 1\right) + e - e + 1 = 2 - (i+1)e^{-i}.$$

5. א. הוכיחו שהישר $x + y = 1$ נתון במרוכבים ע"י $\overline{z} = (1-i) + iz$.
ב. חשבו $\int_\gamma z^4 \left(\overline{z} + \sin(z)\right) dz$ כאשר המסילה γ היא המשולש בעל קודקודים בנקודות $z = 0$, $z = 1$ ו־ $z = i$ המכוון נגד כיוון השעון.

פתרון: נסמן $z = x + iy$, אז

$$\overline{z} = (1-i) + iz \Leftrightarrow \overline{x+iy} = (1-i) + i(x+iy)$$

$$\Leftrightarrow x - iy = 1 - y + i(x-1) \Leftrightarrow x + y = 1$$

כאשר במעבר האחרון השוונו את החלקים הממשיים והמדומים בהתאמה.
ב. נחשב את האינטגרל:

$$\int_\gamma z^4 \left(\overline{z} + \sin(z)\right) dz = \int_\gamma z^4 \overline{z} dz + \int_\gamma z^4 \sin(z) dz$$

האינטגרל השני $\int_\gamma z^4 \sin(z) dz$ מתאפס כי הפונקציה $f(z) = z^4 \sin(z)$ אנליטית והעקומה γ סגורה. כדי לחשב את האינטגרל הראשון נפרק את המסילה $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ כאשר γ_1 היא המסילה מ־ $z = 0$ ל־$z = 1$, γ_2 היא המסילה מ־ $z = 1$ ל־ $z = i$ ו־ γ_3 היא המסילה מ־ $z = i$ ל־$z = 0$.

$$\int_\gamma z^4 \overline{z} dz = \int_{\gamma_1} z^4 \overline{z} dz + \int_{\gamma_2} z^4 \overline{z} dz + \int_{\gamma_3} z^4 \overline{z} dz$$

נחשב כל אחד מאינטגרלים אלו בנפרד. נבצע פרמטריזציה $\gamma_1(t) = t$,

$$\int_{\gamma_1} z^4 \overline{z} dz = \int_0^1 t^4 \overline{t} t' dt = \int_0^1 t^5 dt = \frac{1}{6}.$$

מסעיף ב' נובע שעל העקומה γ_2 מתקיים $\overline{z} = (1-i) + iz$. לכן

$$\int_{\gamma_2} z^4 \overline{z} dz = \int_{\gamma_2} z^4 \left((1-i) + iz\right) dz = (1-i) \int_{\gamma_2} z^4 dz + i \int_{\gamma_2} z^5 dz$$

$$= (1-i) \left.\frac{z^5}{5}\right|_{z=1}^{z=i} + i \left.\frac{z^6}{6}\right|_{z=1}^{z=i} = (1-i)\frac{1}{5}\left(i^5 - 1\right) + \frac{i}{6}\left(i^6 - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{5}(1-i)^2 - \frac{i}{3} = \frac{i}{15}.$$

כדי לחשב את האינטגרל על העקומה γ_3 נבצע פרמטריזציה

$$\gamma_3 = i(1-t),\ 0 \leq t \leq 1 :$$

$$\int_{\gamma_3} z^4 \overline{z} dz = \int_0^1 i^4 (1-t)^4 \overline{i(1-t)}\, (i(1-t))'\, dt$$

$$= -\int_0^1 (1-t)^5 dt = \frac{1}{6}(1-t)^6 \Big|_{t=0}^{t=1} = -\frac{1}{6}.$$

לכן מחיבור כל האינטגרלים נקבל את התוצאה

$$\int_{\gamma} z^4 \overline{z} dz = \frac{i}{15}.$$