

חדוא 2, סמטסטר ב תשפ"ה, מועד א -פתרון

10.8.2025

1. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{(x^2)} - 1 - x^2}{x^3} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(א) מצאו את טור הטיילור סביב אפס המתכנס ל $f(x)$.

פתרון: מתקיים כי (טור ידוע)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

לכן

$$e^{(x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = 1 + x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!}$$

לכן לכל $x \neq 0$ מתקיים

$$\frac{e^{(x^2)} - 1 - x^2}{x^3} = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!}}{x^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{x^{2n}}{x^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n-3} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} x^{2(n+2)-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} x^{2n+1}$$

ועבור הצבה של $x = 0$ בטור הזה נקבל 0. מכאן שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} x^{2n+1}$$

וזהו טור טיילור סביב 0 של f .

(ב) חשבו את $f^{(11)}(0)$.

פתרון: כיוון ש

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} x^{2n+1}$$

וזהו טור טיילור סביב אפס, נקבל שהמקדם של x^{11} הוא $\frac{f^{(11)}(0)}{11!}$. החזקה x^{11} מתקבלת עבור $n = 5$ ולכן

$$\frac{1}{(5+2)!} = \frac{f^{(11)}(0)}{11!}$$

ומכאן ש

$$f^{(11)}(0) = \frac{11!}{7!}$$

2. נביט בסדרת הפונקציות

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$$

(א) קבעו והוכיחו האם הסדרה מתכנסת במידה שווה בקטע $[0, 2]$.

פתרון:

ראשית נמצא את פונקציית הגבול: לכל $0 \leq x < 1$ מתקיים כי $x^n \rightarrow 0$ ולכן

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n} \rightarrow \frac{1}{1+0} = 1$$

עבור $x = 1$ נקבל

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{1+1^n} = \frac{1}{2}$$

ועבור $1 < x \leq 2$ נקבל כי $x^n \rightarrow \infty$ ולכן

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0$$

לכן, לסיכום, פונקצית הגבול $f(x)$ היא

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ 0 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

כעת אם היתה התכנסות במ"ש היינו מקבלים כי $f(x)$ רציפה כיוון ש f_n רציפה (לכל n). אבל קיבלנו ש $f(x)$ אינה רציפה ולכן אין התכנסות במ"ש.

(ב) קבעו והוכיחו האם הסדרה מתכנסת במידה שווה בקטע $[2, \infty)$.

פתרון:

ראשית נמצא את פונקצית הגבול: לכל $x \geq 2$ מתקיים כי $x^n \rightarrow \infty$ ולכן

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0$$

לכן, פונקצית הגבול היא הפונקציה הקבועה על 0. כלומר $f(x) = 0$. נשים לב שלכל $x_1 < x_2$ בקטע $[2, \infty)$ מתקיים כי $x_1^n < x_2^n$ ולכן

$$x_1^n + 1 < x_2^n + 1$$

ולכן

$$\frac{1}{1+x_1^n} > \frac{1}{1+x_2^n}$$

ולכן $f_n(x)$ פונקציה יורדת. לכן $f_n(x)$ מקבלת מקסימום בקטע $[2, \infty)$ שמתקבל ב $x = 2$. כלומר $f(2) = \frac{1}{1+2^n}$ הוא הערך הגדול ביותר בקטע $[2, \infty)$. ה $\inf$ בקטע מתקבל בשאיפה $x \rightarrow \infty$ והוא

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

נשתמש במבחן ה $\lim - \sup$ לקבוע האם יש התכנסות במ"ש.

$$d_n = \sup_{x \in [2, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [2, \infty)} |f_n(x)| = \max \left\{ \frac{1}{1+2^n}, 0 \right\} = \frac{1}{1+2^n} \rightarrow 0$$

ולכן יש התכנסות במ"ש.

3. תהא $u(x, y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בעלת נגזרות חלקיות עם סימנים מנוגדים: כלומר, לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$u_x(x, y) \cdot u_y(x, y) < 0$$

כמו כן נביט בפונקציה $h(t) = u(t, -t)$

(א) הוכיחו כי לפונקציה $h(t)$ אין נקודת מקסימום ואין נקודות מינימום.

פתרון:

נגזור את h לפי כלל השרשרת:

$$\begin{aligned} h'(t) &= u_x(t, -t) \cdot 1 + u_y(t, -t) \cdot (-1) \\ &= u_x(t, -t) - u_y(t, -t) \end{aligned}$$

נניח בשלילה שקיים נקודת קיצון (מקסימום או מינימום) בנקודה t_0 ונקבל כי הנגזרת שמה מתאפסת (משפט פרמה). כלומר

$$0 = h'(t_0) = u_x(t_0, -t_0) - u_y(t_0, -t_0)$$

ואז

$$u_x(t_0, -t_0) = u_y(t_0, -t_0)$$

ואז

$$u_x(t_0, -t_0) \cdot u_y(t_0, -t_0) = [u_x(t_0, -t_0)]^2 \geq 0$$

בסתירה לנתון ש u בעלת נגזרות חלקיות עם סימנים מנוגדים.

(ב) הוכיחו או הפריכו: $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = -\infty$ או $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$

פתרון:

הפרכה: נגדיר $u(x, y) = e^{-x} + e^y$ והיא מקיימת כי

$$u_x(x, y) = -e^{-x}, \quad u_y(x, y) = e^y$$

והכפל בניהם הוא $-e^{-x}e^y < 0$ (כלומר נגזרות חלקיות עם סימנים מנוגדים). אבל

$$h(t) = u(t, -t) = e^{-t} + e^{-t} = 2e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

בפרט $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) \neq \infty$ וגם $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) \neq -\infty$.

4. יואב העתודאי הלך לים וחלץ את סנדליו. יואב עומד בסוכת המציל בנקודה $(0, 0)$, ופונקציית הטמפרטורה של חול הים היא

$$f(x, y) = 32 + x^2 + y^2 + y$$

(א) מצאו לאיזה כיוון ילך יואב, אם הוא רוצה ללכת בכיוון בו הטמפרטורה עולה בקצב הכי מהיר.

פתרון:

זה הכיוון של הגראדיאנט בנקודה $(0, 0)$.

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y + 1)$$

ולכן

$$\nabla f(0, 0) = (0, 1)$$

(ב) מצאו את הטמפרטורה הגבוהה ביותר, והטמפרטורה הנמוכה ביותר בתחום $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. נמצא נקודות קריטיות ואז

פתרון:

הפונקציה f רציפה ו D תחום חסום וסגור. מכאן של f יש מקס' ומינ' גלובלי ב D . נמצא נקודות קריטיות ואז נציב את כולם לראות איזה ערך הכי גדול וקטן מתקבלים.

• נקודות קריטיות בתוך D בהן הגראדיאנט מתאפס:

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y + 1)$$

ולכן $\nabla f(x, y) = (2x, 2y + 1) = (0, 0)$ אמ"מ $x = 0, y = -\frac{1}{2}$. כיוון ש $(0, -\frac{1}{2}) \in D$ נקבל שהיא נקודה חשודה.

• נקודות חשודות על השפה של D , כלומר על $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$: נשתמש בכופלי לגרנז'. נגדיר $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ונחפש נקודות (x, y) כך ש $g(x, y) = 0$ (כלומר נמצאות ב C) ומקיימות שקיים λ כך ש

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

מתקיים $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$ ולכן, נקבל את מערכת המשוואות הבא:

$$\begin{cases} 2x &= \lambda \cdot 2x \\ 2y + 1 &= \lambda \cdot 2y \\ 0 &= x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$$

- אם $x = 0$ נקבל מהמשוואה השלישית כי $y = \pm 1$ ומהמשוואה השנייה נקבל (זה לא חשוב אבל נוודא שיש פתרון)

$$\lambda = \frac{2y + 1}{2y} = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

מכאן ש $(0, 1), (0, -1)$ נקודות חשודות.

- אם $x \neq 0$ נקבל מהמשוואה הראשונה כי $\lambda = 1$. המשוואה השנייה הופכת ל $2y + 1 = 2y$ שלא מתקיימת. לכן אין נקודות חשודות עבור $x \neq 0$.

קיבלנו 3 נקודות חשודות: $(0, -1), (0, 1), (0, -\frac{1}{2})$. נציב אותם ב f לקבל את הערכים

$$\left\{ 32 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}, 32 + 1 + 1, 32 + 1 - 1 \right\} = \left\{ 31\frac{3}{4}, 34, 32 \right\}$$

ולכן הערך הגבוה ביותר הוא 34 והערך הנמוך ביותר הוא $31\frac{3}{4}$.

5. יואב העתודאי מתכנן בניית מבנה לחתימה על טפסים. בסיס הבניין הוא

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

וגובה התקרה נתון ע"י הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2$. כמו כן, צפיפות הקירות נתונה ע"י הפונקציה $g(x, y, z) = 5 - z$.

(א) חשבו את נפח הבניין.

פתרון:

הנפח נתון על ידי

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

נעבור לקורדינאטות פולריות $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ כאשר $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$ ונקבל

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cdot r dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 + 2) \cdot r dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2 + 2) \cdot r dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} + r^2 \right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{1}{4} + 1 \right] = \frac{10\pi}{4} \end{aligned}$$

(ב) חשבו את המסה של קירות הבניין (לא כולל את התקרה או הרצפה).

פתרון:

נסמן את הקירות בקבוצה W ונקבל שהמסה נתונה

$$\cdot \iiint_W g(x, y, z) dx dy dz$$

הקירות של הבניין עומדים על מעגל היחידה $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ובכל נקודה על מעגל היחידה (x, y) הגובה של הקיר הוא $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2$. נשתמש בקורדינאטות פולריות $x = 1 \cdot \cos(\theta)$, $y = 1 \cdot \sin(\theta)$ כאשר $0 \leq \theta \leq 2\pi$ לייצג את הנקודות במעגל היחידה. נקבל שגובה הקיר בנקודה $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ הוא

$$f(\cos(\theta), \sin(\theta)) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) + 2 = 3$$

ומכאן נקבל פרמטריזציה של הקירות על ידי

$$s(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$$

כאשר $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 3$. נחשב את $|s_\theta \times s_z|$:

$$s_\theta \times s_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos(\theta) \sin(\theta), 0)$$

ולכן $|s_\theta \times s_z| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) + 0^2} = 1$ מכאן שהמסה ניתנת לחישוב:

$$\begin{aligned} \iiint_W g(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (5 - z) \cdot 1 dz d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 (5 - z) dz \\ &= 2\pi \cdot \left(5z - \frac{z^2}{2} \right)_0^3 = 2\pi \left(15 - \frac{9}{2} \right) = 21\pi \end{aligned}$$

6. נסמן ב- M את התקרה של המבנה שיואב העתודאי הקים, בהתאם לתיכנונו מהשאלה הקודמת. גשם זלעפות החל לרדת על גג הבניין, והכוח שהגשם הפעיל בכל נקודה נתון ע"י השדה הוקטורי

$$\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z - 5)$$

חשבו את השטף של פגיעת הגשם בתקרה, כלומר האינטגרל המשטחי מסוג שני

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

כאשר הנורמל מכוון כלפי פנים הבניין.

פתרון:

נשתמש בקורדינאטות פולריות $x = r \cdot \cos(\theta)$, $y = r \cdot \sin(\theta)$ כאשר $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$ לייצג את הנקודות בעיגול היחידה D . לכל נקודה $x = r \cdot \cos(\theta)$, $y = r \cdot \sin(\theta)$ ב- D , גובה התקרה מעליה הוא

$$x^2 + y^2 + 2 = r^2 + 2$$

ולכן פרמטריזציה של התקרה היא

$$s(r, \theta) = (r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta), r^2 + 2)$$

כאשר $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$. מתקיים ש

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \pm \int_0^{2\pi} \int_0^1 \vec{F}(s(r, \theta)) \cdot (s_r \times s_\theta) dr d\theta$$

נחשב $s_r \times s_\theta$:

$$s_r \times s_\theta = \left| \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 2r \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} \right| = (-2r^2 \cos(\theta), -2r^2 \sin(\theta), r)$$

זה הנורמל שמכוון כלפי חוץ (לפי רכיב z שפונה למעלה) לכן ניקח את המינוס:

$$\begin{aligned} \iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (0, 0, r^2 + 2 - 5) \cdot (-2r^2 \cos(\theta), -2r^2 \sin(\theta), r) dr d\theta = \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^3 - 3r) dr d\theta = 2\pi \int_0^1 (3r - r^3) dr = 2\pi \left[\frac{3r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right] = \frac{10\pi}{4} \end{aligned}$$