אתר www.cs.biu.ac.il/~89-220

מתרגלת: נטע ברקאי - algorithms1.biu@gmail.com

הפרד ומשול

3 בנובמבר 2011

חיפוש בינארי

יש לנו מערך ממויין, ורוצים לחפש בו איבר. מחפשים את האיבר באמצע, ולפי הערך בוחרים חצי שמאלי או ימני של המערך, ומבצעים עליו חיפוש בינארי.

אלגוריתם לחיפוש איבר k במערך ממויין A עם n איברים:

1. השווה את k עם האיבר האמצעי.
2. אם k גדול ממנו, חפש רקורסיבית בצד של האיברים הגדולים.
   אחרת, חפש רקורסיבית בצד של האיברים הקטנים.

זמן ריצה:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \theta(1) \Rightarrow T(n) = \theta(\log n) \Leftrightarrow T(n) \in \theta(\log n)$$

מספרי פיבונאצ'י

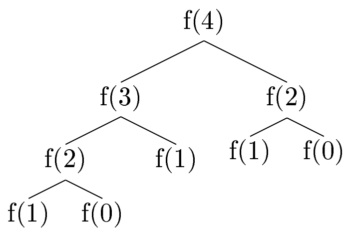
$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1) + f(n-2) \\ f(0) &= 1 \\ f(1) &= 1 \end{aligned}$$

אלגוריתם

1. חשב את $f(n-2)$ רקורסיבית
2. חשב את $f(n-1)$ רקורסיבית
3. החזר $f(n-1) + f(n-2)$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \theta(1)$$
$$T(0) = 1$$
$$T(1) = 1$$

טענה



אם מחשבים את מספר פיבונאצ'י בעזרת עץ, מספר הקודקודים בעץ הוא באותו סדר גודל של מספר העלים בעץ.

הסבר מתוך העובדה שהעץ שלם - לכל קודקוד יש 0 או 2 בנים.

כמה עלים יש?

טענה: מס' העלים עם $f(1) \leq$ מס' העלים עם $f(0)$.

הוכחה: כל פעם שמופיע $f(0)$ בעץ, הוא הגיע מ$f(2)$. וכל פעם שמופיע $f(2)$, יש לו את $f(1)$ כבן. לכן על כל $f(0)$ יש $f(1)$ לפחות.

מסקנה: מס' העלים בעץ $\leq$ (מס' הפעמים ש$f(1)$ בעץ)$\cdot 2$

אבחנה: מס' העלים עם $f(1)$בעץ של $f(n)$ הוא $f(n)$.

הסבר: $f(1)$ זה מה שמוסיף $+1$ בשביל לקבל את הערך $f(n)$

מקבלים: מס' העלים בעץ $\leq 2 \cdot f(n)$

מסקנה: מס' הקודקודים בעץ הוא $\theta(f(n))$

זמן הריצה הוא $T(n) = \theta(f(n))$

$$f(n) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803, \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.61803$$

$$T(n) = \theta(f(n))$$

$$f(n) \in \theta\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \approx \theta(1.618)^n$$

אלגוריתם איטרטיבי לחישוב $f(n)$

1. אם $n = 0$: החזר 0
2. אם $n = 1$: החזר 1
3. $F_{n-2} \leftarrow 0$
4. $F_{n-1} \leftarrow 1$
5. עבור i מ2 עד n בצע:
   (א) $F_n \leftarrow F_{n-1} + F_{n-2}$
   (ב) $F_{n-2} = F_{n-1}$
   (ג) $F_{n-1} = F_n$

העלאת איבר בחזקה

קלט: איבר a ומס' טבעי n.

פלט: a^n

$$a^n = \begin{cases} a^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} & n\,is\,even \\ a^{\frac{n-1}{2}} a^{\frac{n-1}{2}} & n\,is\,odd \end{cases}$$

$$T(n) \leq T\left(\frac{n}{2}\right) + \theta(1)$$

$$T(n) \geq T\left(\frac{n-1}{2}\right) + \theta(1)$$

$$\Rightarrow T(n) = \theta(\log n)$$

$$f(n+1) = f(n) + f(n-1)$$

נחזור לפיבונאצ'י

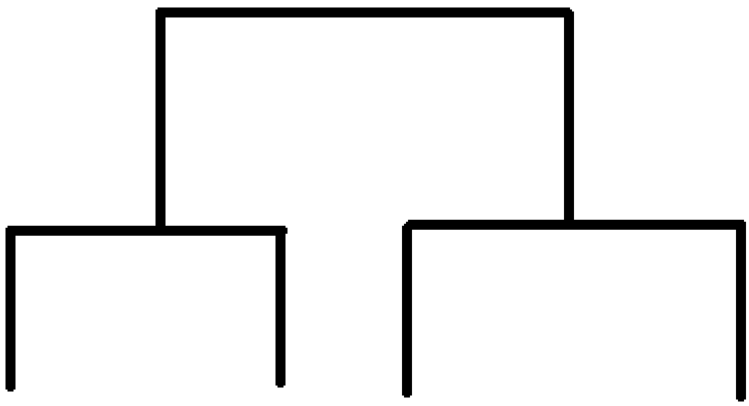
$$\begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(n) \\ f(n-1) \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} f(1) \\ f(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נסכם: הזמן לחישוב האיבר $f(n)$ בסדרת פיבונאצ'י הוא $T(n) = \theta(\log n)$

הסבר: נעשה העלאה בחזקה של מטריצה 2×2

שיכון של עץ בינארי בVLSI(Very Large Scale Integration)

שיכון: הצבה של הקודקודים של העץ הבינארי בחיבורים של הVLSI



ניתוח מימדים VLSI

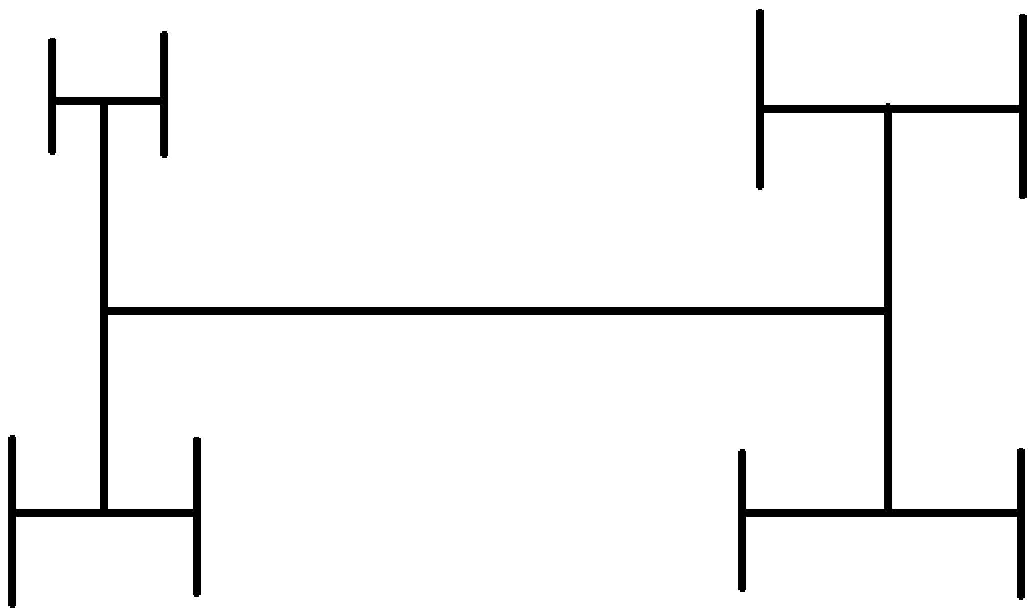
לגובה נוסף גודל קבוע בכל רמה, והרוחב מכפיל את עצמו בכל רמה

גובה: $H(n) = H\left(\frac{n}{2}\right) + \theta(1) \Rightarrow \theta(\log n)$

רוחב: $W(n) = 2W\left(\frac{n}{2}\right) + \theta(1) \Rightarrow \theta(n)$

שטח: $A(n) = H(n)\,W(n) = \theta(n \log n)$

שיכון בצורת H



ניתוח מימדים בVLSI:

כאן, גם הגובה וגם הרוחב מכפילים את עצמם כל רמה שניה - לסירוגין:

גובה: $$H(n) = 2H\left(\frac{n}{4}\right) + \theta(1) \Rightarrow \theta(\sqrt{n})$$

רוחב: $$W(n) = 2W\left(\frac{n}{4}\right) + \theta(1) \Rightarrow \theta(\sqrt{n})$$

רוחב: $$A(n) = H(n)\,W(n) \Rightarrow \theta(n)$$

לא ניתן להשיג תוצאה יותר יעילה, שכן בסופו של דבר, כל קודקוד תופס מקום, כלומר כל הוספה של קודקוד חייבת להגדיל את השטח בכמות מינימלית כלשהי, ולכן היעילות הכי טובה שיכולה להיות היא $\theta(n)$.