זהבית צבי
כל הזכויות שמורות©

גיאומטריה אוקלידית, אקסיומות החפיפות- פתרון תרגיל 3

תרגיל 1

חלק ממשפט C-4

- אם ידוע $AB > CD$ ו-$CD \cong EF$, אז $AB > EF$.

הוכחה

נתון כי $AB > CD$. לפי הגדרת היחס $<$ בין קטעים, קיימת נקודה P בין A ו- B כך ש-$AP \cong CD$. נתון גם $CD \cong EF$, אז לפי אקסיומה $C-2$ מקבלים $AP \cong EF$ ושוב לפי הגדרת $<$: $AB > EF$.

- אם $AB < CD$ ו-$CD < EF$ אז $AB < EF$ (טרנזיטיביות).

הוכחה

מכיוון ש-$AB < CD$, קימת נקודה P בין C ו-D כך ש-$AB \cong CP$. מכיוון שנתון כי $CD < EF$ קימת נקודה Q בין E ל F כך ש-$CD \cong EQ$. לפי משפט $C-3$ קימת נקודה יחידה R בין E ל-Q, כך ש-$CD \cong ER$.

מכיוון שגם $AB \cong CP$, לפי אקסיומה $C-2$ מקבלים $AB \cong ER$. לפי בחירת הנקודות Q, R מתקימים היחסים: $E * R * Q$ ו- $E * Q * F$.

לפי משפט $B.3$ מתקים $E * R * F$, לכן $ER < EF$ ובסה"כ $AB < EF$.

תרגיל 2

הוכיחו את משפט C.6:

א. זוויות קודקודיות הן חופפות זו לזו.
ב. כל זווית שחופפת לזווית ישרה היא בעצמה זווית ישרה.

הוכחה

א. $\sphericalangle ABC$ היא משלימה ל-180° עבור זווית $\sphericalangle ABE$

$\sphericalangle DBE$ היא משלימה ל-180° עבור זווית $\sphericalangle ABE$

לפי אקסיומה $C-5$ $\sphericalangle ABE \cong \sphericalangle ABE$ ולכן לפי משפט $C-5$ זוויות שמשלימות ל-180° של זוויות חופפות ($\sphericalangle ABE$) הן חופפות $\Leftarrow$ $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DBE$. מש"ל

ב. נניח $\sphericalangle ABC$ היא זווית ישרה ונתון $\sphericalangle DEF \cong \sphericalangle ABC$.

צריך להוכיח ש$\sphericalangle DEF$ ישרה.

נניח שנקודה P היא על הקרן ההפוכה ל-$\overrightarrow{BC}$ ונקודה Q היא על הקרן ההפוכה ל-$\overrightarrow{EF}$.

לפי הגדרת זווית ישרה צריך להוכיח ש-$\sphericalangle DEF \cong \sphericalangle QED$.

זהבית צבי
כל הזכויות שמורות©

נתון כי $(*)$ $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$. לפי משפט $C-5$ זוויות המשלימות ל-180° של זוויות חופפות הן חופפות, כלומר $(**)$ $\sphericalangle ABP \cong \sphericalangle DEQ$.
לפי הגדרה ש-$\sphericalangle ABC$ זווית ישרה היא חופפת למשלימה שלה כלומר $(***)$ $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle ABP$.
ולכן לפי אקסיומה $C-5$ $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEQ$.
לפי $(**)$ ו-$(***)$ ושוב לפי אקסיומה $C-5$ והמסקנות שהגענו אליהם,
$\sphericalangle DEQ \cong \sphericalangle DEF \Leftarrow \sphericalangle DEF$ ישרה עפ"י הגדרה.

<u>תרגיל 3</u>

משפט C.8: היפוך של משפט C.1

אם ב-ΔABC יש לנו $\sphericalangle B = \sphericalangle C$ אז $AB \cong AC$ ו-ΔABC שווה שוקים.

<u>הוכחה</u>

נחשיב את ההתאמה של הקודקודים $A \leftrightarrow A$, $C \leftrightarrow B$, $B \leftrightarrow C$.

לפי אקסיומה $C-2$, $BC \cong BC$ כל קטע חופף לעצמו.

נתון $\sphericalangle C = \sphericalangle B$ לפי משפט $C-8$ קריטריון ז.צ.ז $\Delta ABC \cong \Delta ACB$.

לכן לפי הגדרת משולשים חופפים נקבל ש-$AB \cong AC$ ומכאן נובע ש-ΔABC שווה שוקים.

<u>תרגיל 4</u>

משפט $C.9$:

נתון קרן $\overrightarrow{BG}$ בין $\overrightarrow{BA}$ ל- $\overrightarrow{BC}$, קרן $\overrightarrow{EH}$ בין $\overrightarrow{ED}$ ל-$\overrightarrow{EF}$, $\sphericalangle CBG \cong \sphericalangle FEH$ ו- $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$. הוכיחו כי $\sphericalangle GBA \cong \sphericalangle HED$.

<u>הוכחה</u>

נניח בשלילה כי $\sphericalangle GBA \ncong \sphericalangle HED$.
לפי אקסיומה $C-4$ קימת קרן יחידה $\overrightarrow{EX}$ בצד נתון של הישר $\overleftrightarrow{EH}$ כך
ש-$\sphericalangle HEX \cong \sphericalangle GBA$, ולכן $\overrightarrow{EX} \neq \overrightarrow{ED}$ קרן יחידה שמקימת את חפיפת הזוויות.
נתון $\sphericalangle CBG \cong \sphericalangle FEH$ ולפי הנחת השלילה $\sphericalangle HEX \cong \sphericalangle GBA$. לכן לפי משפט $C-10$
נקבל $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle XEF$.
בנוסף נתון $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$ ולכן לפי אקסיומה $C-5$ נקבל: $\sphericalangle DEF \cong \sphericalangle XEF$.
לפי יחידות הקרן שתתן שוויון בין זוויות אלו חיב להתקים $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EX}$ וקיבלנו סתירה להנחה
$\Longleftarrow$ $\sphericalangle HED \cong \sphericalangle GBA$. מש"ל.

זהבית צבי
כל הזכויות שמורות©

<u>תרגיל 5</u>

חלק ממשפט C -10

- אם ידוע $\sphericalangle Q < \sphericalangle P$ ו-$\sphericalangle Q \cong \sphericalangle R$, אז $\sphericalangle R < \sphericalangle P$.

<u>הוכחה</u>

נסמן $\sphericalangle P = \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle Q = \sphericalangle DEF$ ו- $\sphericalangle R = \sphericalangle GHI$.
מכיוון שנתון כי $\sphericalangle ABC > \sphericalangle DEF$, קימת קרן $\overrightarrow{BX}$ בין $\overrightarrow{BA}$ ל-$\overrightarrow{BC}$ כך ש-
$\sphericalangle XBC \cong \sphericalangle DEF$. לפי אקסיומה $C-5$ $\sphericalangle XBC \cong \sphericalangle GHI$, לכן $\sphericalangle ABC > \sphericalangle GHI$.

בהצלחה ☺