

תרגיל בית 4 סדרה הנדסית וכללית

מתמטיקה תיכונית מנקודת מבט אקדמית

1.

a_n היא סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה היא q . $|q| \neq 1$.

נתון: $a_3 \cdot a_7 = 1$.

א. חשב את a_5 (מצא את שתי האפשרויות).

נתון: $a_5 > 0$.

ב. (1) הבע את a_1 באמצעות q .

(2) האם קיים n טבעי שעבורו $a_n = \frac{1}{a_1}$? אם כן – מצא אותו. אם לא – נמק.

(3) האם קיים n טבעי שעבורו $a_n = \frac{1}{a_{13}}$? אם כן – מצא אותו. אם לא – נמק.

ג. (1) הבע באמצעות q את 7 האיברים הראשונים של הסדרה a_n .

(2) נתון: $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k = 1$ (k הוא מספר טבעי).

מצא את הערך של k , והסבר מדוע הוא הערך האפשרי היחיד של k .

2.

נתונה סדרה a_n המקיימת לכל n את הכלל: $a_{n+1} + a_n = 6n + 5$.

א. הוכח כי מתקיים $a_{n+2} = a_n + c$ (c הוא מספר קבוע), ומצא את c .

ב. כתוב דוגמה לסדרה a_n המקיימת את הכלל, והיא אינה סדרה חשבונית (כתוב לפחות 4 איברים ראשונים בסדרה).

נתון כי הסדרה a_n כולה היא חשבונית.

ג. חשב את a_1 .

בנו סדרה חדשה בת $2n + 1$ איברים:

$$a_1 - 1, a_2 - 2, a_3 - 3, \dots, a_{2n+1} - (2n + 1)$$

האיבר האמצעי בסדרה החדשה הוא 43.

ד. חשב את סכום הסדרה החדשה.

3.

a_n היא סדרה הנדסית אינ'סופית מתכנסת שסכומה שלילי.

a_1 הוא האיבר הראשון בסדרה, q היא מנת הסדרה.

א. לפניך ארבע טענות (IV-I). רק אחת מהן בהכרח נכונה. ציין את מספרה ונמק.

$$(I) \quad q < 0$$

$$(II) \quad a_1 < 0 \text{ וגם } q < 0$$

$$(III) \quad a_1 < 0$$

$$(IV) \quad a_1 > 0 \text{ או } q < 0$$

נסמן ב- T את סכום האיברים במקומות האיזוגיים בסדרה a_n ,

ונסמן ב- R את סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה a_n .

p הוא פרמטר.

$$\text{נתון: } T + p \cdot R = 0$$

ב. הבע את p באמצעות q .

ג. b_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא p .

האם b_n היא סדרה מתכנסת? נמק.

ד. נתון: p שלילי. הראה שלכל n טבעי $a_{n+1} > a_n$

(כלומר הראה שהסדרה a_n היא סדרה עולה).

4.

הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n}$, $a_1 = -\frac{1}{c}$. נתון: $c > 0$.

א. הוכח כי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות האיזוגיים מהווים סדרה הנדסית,

וכי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים גם הם סדרה הנדסית.

ב. (1) רשום את 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n . הבע את תשובתך באמצעות c אם יש צורך.

(2) הבע באמצעות c את סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n .

(3) הוכח שלכל n טבעי, הסכום של $2n - 1$ האיברים הראשונים בסדרה a_n אינו תלוי ב- n .

ג. הסדרה b_n מוגדרת באופן הזה: $b_n = -\frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$.

(1) הראה כי b_n היא סדרה הנדסית.

(2) מהו תחום הערכים של c שבעבורם b_n היא סדרה יורדת?

(3) נתון שהסדרה האינ'סופית b_n היא סדרה יורדת.

הבע באמצעות c את סכומה.

