

מבחן בקורס מכינה למתמטיקה לקראת שנת תשע"ז

מרצה: דר' ארז שיינר. תאריך: 14/09/16

הוראות: יש לפתור כמה שיותר שאלות ולנמק היטב. כל שאלה שווה 17 נקודות. בהצלחה (=)

1. נגדיר את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x > 1 \\ |x| & -1 < x \leq 1 \\ 2x - 3 & x \leq -1 \end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $f(f(x)) \leq |x-1|$

תחום ראשון $x > 1$ ולכן כי השוויון נראה כך

$$f(-x^2) \leq x - 1$$

כיוון ש $x > 1$ אז $x^2 > 1$ ולכן $-x^2 < -1$

ולכן אי השוויון נראה כך

$$2(-x^2) - 3 \leq x - 1$$

$$2x^2 + x + 2 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 16}}{4}$$

כלומר זו פרבולה מחייכת ומרחפת ולכן מתקיים בכל התחום.

תחום $0 \leq x \leq 1$

אי השוויון הוא

$$f(|x|) \leq 1 - x$$

אבל בתחום זה $|x| = x$

ולכן $f(|x|) = f(x) = |x| = x$

סה"כ אי השוויון הוא

$$x \leq 1 - x$$

$$2x \leq 1$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$

לא מתקיים $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ כן מתקיים $\frac{1}{2} < x \leq 1$

תחום שלישי $-1 < x < 0$

אי השיוויון הוא

$$f(|x|) \leq 1 - x$$

אך הפעם $|x| = -x$

$$f(|x|) = f(-x)$$

אבל עדיין $-1 < -x \leq 1$ ולכן

$$f(-x) = |-x| = |x| = -x$$

אי השיוויון נראה כך

$$-x \leq 1 - x$$

$$0 \leq 1$$

מתקיים בכל התחום.

תחום רביעי $x \leq -1$

$$f(f(x)) = f(2x - 3)$$

קצת נפתח את אי השיוויון שמתאר את התחום, על מנת להבין מה התחום של $2x - 3$

$$x \leq -1$$

$$2x \leq -2$$

$$2x - 3 \leq -5$$

ולכן

$$f(2x - 3) = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$$

אי השיוויון נראה כך

$$4x - 9 \leq 1 - x$$

$$5x \leq 10$$

$$x \leq 2$$

מתקיים בכל התחום.

סה"כ סיכום

מתקיים לכל $x \leq \frac{1}{2}$ ולכל $x > 1$.

העשרה קטנה:

האם נכון היה לרשום "או" או "וגם"?

זה בעצם תלוי במשפט המלא, שהוא לרוב חסר.

x הוא מקיים את אי השיוויון אם ורק אם $x \leq \frac{1}{2}$ או $x > 1$

כל התחום $(-\infty, \frac{1}{2}]$ מקיים את אי השיוויון וגם כל התחום $(1, \infty)$ מקיים את השיוויון.

2. מצאו את כל הפתרונות למשוואה $(z+i)^5 = 1+i$

נסמן $w = z + i$ נפתור עבור w ונקבל 5 פתרונות, מהם נקבל 5 פתרונות למשוואה

$$z_k = w_k - i$$

וסה"כ

$$z_k = \sqrt[5]{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{5} \right) - i$$

עבור $k = 0, 1, 2, 3, 4$

3.

א. יהי וקטור במרחב \mathbb{R}^3 . הוכיחו כי $v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = (0, 0, 0)$.

ב. יהיו שני וקטורים במרחב \mathbb{R}^3 , $v, u \in \mathbb{R}^3$ המאונכים זה לזה, כך ש $v, u \neq (0, 0, 0)$.

מצאו את כל הסקלרים (מספרים) $a, b \in \mathbb{R}$ המקיימים $av + bu = (0, 0, 0)$.

א.

נוכיח בשני הכיוונים. בכיוון הראשון, אם $v = (0, 0, 0)$ ברור ש $v \cdot v = 0$

בכיוון השני, נניח כי $v \cdot v = 0$ צ"ל $v = (0, 0, 0)$

נסמן $v = (a, b, c)$ לפי הנתון

$$v \cdot v = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

ולכן $a = b = c = 0$ כפי שרצינו.

ב. ברור ש $a = b = 0$ מקיימים את המשוואה, נבדוק האם יש גם אחרים.

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש $av + bu = (0, 0, 0)$

$$(av + bu) \cdot u = (0, 0, 0) \cdot u$$

$$a|u|^2 = 0$$

כיוון ש $u \neq 0$ גם $|u| \neq 0$ ולכן סה"כ $a = 0$

באופן דומה ע"י כפל בט נסיק כי $b = 0$

והפתרון היחיד הוא $a = b = 0$.

4. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ $2 \leq n$ המספר $n^3 - n$ מחלק ב3.

בנוסף: הוכיחו כי למעשה $n^3 - n$ מתחלק ב6.

בדיקה: עבור $n = 2$ אכן $2^3 - 2 = 6$ מתחלק ב3

בהנחת n עבורו $n^3 - n$ מתחלק ב3, צ"ל כי $(n+1)^3 - (n+1)$ מתחלק ב3.

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$$

סכום של ביטויים המתחלקים ב3 מתחלק גם הוא ב3.

בנוסף: על מנת להראות שהביטוי מתחלק ב6 מספיק להוכיח שהוא גם זוגי.

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)$$

$n(n+1)$ הוא תמיד זוגי כמכפלה של שתי עוקבים.

תוספת, למעשה בדרך זו ניתן לעקוף את כל האינדוקציה כי

$n(n+1)(n-1)$ הוא מכפלה של 3 מספרים עוקבים, אחד מהם חייב להתחלק ב3.

5. פתרו את האינטגרל $\int [(3x^2 + 1) \cdot \ln(1 + x^2)] dx$

$$\int (3x^2 + 1) \cdot \ln(1 + x^2) dx = \left\{ \begin{array}{l} f' = 3x^2 + 1 \quad g = \ln(1 + x^2) \\ f = x^3 + x \quad g' = \frac{2x}{1 + x^2} \end{array} \right\} = (x^3 + x) \ln(1 + x^2) - \int \frac{(x^3 + x)2x}{1 + x^2} dx =$$
$$= (x^3 + x) \ln(1 + x^2) - \int \frac{x(x^2 + 1)2x}{1 + x^2} dx = (x^3 + x) \ln(1 + x^2) - \int 2x^2 dx = (x^3 + x) \ln(1 + x^2) - \frac{2x^3}{3} + C$$

6. הגדרה: אוסף R של זוגות של מספרים טבעיים נקרא **מלא** אם

$$\forall a \in \mathbb{N} \forall b \in \mathbb{N}: (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$$

א. נסחו תנאי השקול לכך שהאוסף R אינו מלא.

ב. קבעו והוכיחו אילו מן האוספים הבאים הינם מלאים ואילו אינם מלאים:

$$S = \{(n, m) \mid n \leq m\}, R = \{(n, m) \mid n < m\}, T = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

סעיף א': האוסף R אינו מלא

$$\exists a \in \mathbb{N} \exists b \in \mathbb{N}: (a, b) \notin R \wedge (b, a) \notin R$$

סעיף ב':

נוכיח כי T אינו מלא. נבחר $a = 1, b = 2$ ואכן $(1, 2) \notin T$ וגם $(2, 1) \notin T$

נוכיח כי R אינו מלא. נבחר $a = b = 1$ ואכן $(1, 1) \notin R$ וגם $(1, 1) \notin R$

נוכיח כי S כן מלא. יהיו $a, b \in \mathbb{N}$ אם $a \leq b$ אז $(a, b) \in S$ אחרת $b < a$ ולכן $(b, a) \in S$.

7. הוכיחו/הפריכו: לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B \subseteq B \setminus C$

ננסה להוכיח.

תהיינה A, B, C

כיוון ראשון: נניח כי $A \subseteq B$ וצ"ל $A \setminus B \subseteq B \setminus C$

יהי $x \in A$

צ"ל $x \in B$

נב"ש $x \notin B$, כיוון ש $x \in A$ נובע כי $x \in A \setminus B$

ולכן מהנתון $x \in B \setminus C$ ולכן $x \in B$ סתירה.

כיוון שני: נניח $A \subseteq B$ וצ"ל $A \setminus B \subseteq B \setminus C$

יהי $x \in A \setminus B$

צ"ל כי $x \in B \setminus C$

נתון כי $x \in A$ וגם $x \notin B$

כיוון ש $x \in A$ וגם $A \subseteq B$ נובע כי $x \in B$

סתירה. וסיימנו כי שקר גורר כל דבר.

הסבר: כיצד הגענו לסתירה, והרי לא הנחנו לכאורה שום דבר? הסתירה היא לעצם קיומו של האיבר $x \in A \setminus B$.

בעצם הוכחנו כי $A \setminus B$ קבוצה ריקה, ולכן בוודאי היא מוכלת בכל דבר.