

# אוניברסיטת בר-אילן

## מכינה למתמטיקה

### מבחן סופי

13.09.11

### פתרונות ותשובות

משך המבחן: שעתיים וחצי

## חלק 1

פתור 4 מתוך 5 שאלות

1. פתור את האי-שוויון הבא:  $x^2 - 6|x+1| - 1 \leq 0$

פתרון:

$$\text{מקרה 1: } x \geq -1 \Leftrightarrow x^2 - 6(x+1) - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 7$$

$$\text{מקרה 2: } x < -1 \Leftrightarrow x^2 + 6(x+1) - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq x < -1$$

תשובה סופית: איחוד של 2 מקרים  $-5 \leq x \leq 7$

2. א) שרטט את התחום המתואר ע"י הביטוי הבא במישור המרוכב:  $|z-1| \leq 2$

ב) מצא את כל הפתרונות של המשוואה הבאה:  $z\bar{z} - 5\bar{z} = 10i$

פתרון:

א) התחום הוא עיגול שמרכזו ב-  $z_0 = 1$  ורדיוסו  $r = 2$ , כולל המעגל.

ב)

$$z\bar{z} - 5\bar{z} = 10i \Rightarrow (x+iy)(x-iy) - 5x + 5iy = 10i \Rightarrow x^2 + y^2 - 5x + i(5y-10) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 5x = 0 \\ 5y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4 - 5x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

הפתרונות הם:  $z = 1 + 2i$  ו-  $z = 4 + 2i$

3. מיינ ושרטט את העקומה הבאה:  $9x^2 - y^2 + 18x - 18 = 0$

פתרון:

$$9x^2 - y^2 + 18x - 18 = 0 \Rightarrow 9(x^2 + 2x + 1 - 1) - 18 - y^2 = 0 \Rightarrow$$

$$9(x+1)^2 - y^2 = 27 \quad | :27 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{3} - \frac{y^2}{27} = 1$$

העקומה היא היפרבולה עם מרכז ב-  $(-1, 0)$

4. נתונה הפונקציה  $y = \cos(\sin^2 x)$  . מצא  $y'(\frac{\pi}{4})$

פתרון:

$$y = \cos(\sin^2 x) \Rightarrow y' = -\sin(\cos^2 x) \cdot 2 \cos x \sin x = -\sin(\cos^2 x) \sin 2x$$

$$y'(\frac{\pi}{4}) = -\sin(\cos^2(\frac{\pi}{4})) \sin(\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{1}{2})$$

5. חשב את האינטגרל:  $\int \frac{1+x+3x^2}{\sqrt{x}} dx$

פתרון:

$$\int \frac{1+x+3x^2}{\sqrt{x}} dx = \int \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + 3x\sqrt{x} \right) dx = 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{6}{5}x^2\sqrt{x} + C$$

## חלק 2

### פתור 2 מתוך 3 שאלות

1. הוכח כי  $\sqrt[3]{2} \notin Q$  (כלומר  $\sqrt[3]{2}$  אינו רציונאלי)

פתרון:

נגדיר  $x = \sqrt[3]{2}$   $x^3 = 2 \Leftrightarrow x^3 - 2 = 0$ . זאת משוואה עם מקדמים שלמים, לכן אם

יש לה שורשים רציונאליים מהצורה  $\frac{p}{q}$ , אז  $|p| - 1$  ו-  $q$

מכאן  $\frac{p}{q} = \pm \frac{2}{1}$ , אבל הם לא מקיימים את המשוואה  $(\pm 2)^3 - 2 \neq 0$ , לכן השורשים

שלה אינם רציונאליים. כיוון ש-  $\sqrt[3]{2}$  הוא שורש של המשוואה הנ"ל, אז הוא אינו רציונאלי.

2. בנה טבלת האמת עבור הפסוק הבא  $(p \wedge [p \rightarrow q]) \rightarrow q$ . האם הוא טאוטולוגיה?

תשובה: כן, טאוטולוגיה.

3. הוכח את ההכלה  $(A \cup B) \setminus C \subseteq A \cup (B \setminus C)$

פתרון:

$$x \in (A \cup B) \setminus C \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C \stackrel{\text{פילוג}}{\Rightarrow} (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \\ \Rightarrow x \in A \vee (x \in B \setminus C) \Rightarrow x \in A \cup (B \setminus C)$$

בהצלחה!

