פתרון תרגיל 8 – אינפי 1

1. הוכיחו לפי הגדרה שמתקיים: $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-x-6}{x-8}=-36$

פתרון: יהי $\varepsilon>0$ צריך למצוא $\delta>0$ כך שלכל $0<|x-7|<\delta$ מתקיים $|f(x)+36|<\varepsilon$.

$\left|\frac{x^2-x-6}{x-8}+36\right|=\frac{|x+42||x-7|}{|x-8|}$.

$|x-7|<\delta\Leftrightarrow-\delta<x-7<\delta\Leftrightarrow-\delta+49<x+42<\delta+49$. ניקח $\delta<1$ ולכן $|x+42|<50$

בצורה דומה $-\delta<x-7<\delta\Leftrightarrow-\delta-1<x-8<\delta-1$ עבור $\delta<\frac{1}{2}$ מקבלים

$-1\frac{1}{2}<x-8<-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}<8-x<1\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}<|8-x|$ ובסה"כ אנו מקבלים

$|f(x)+36|=\frac{|x+42||x-7|}{|x-8|}<\frac{50\delta}{\frac{1}{2}}=100\delta$. ניקח $\delta=\min\left(\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{100}\right)$ ולכן

$|f(x)+36|<100\frac{\varepsilon}{100}=\varepsilon$

2. מצאו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (הוכיחו את תשובתכם)

פתרון: תהי סדרה $x_n\to 0$. לכן $f(x_n)=x_n\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)$ וזה בדיוק סדרה חסומה כפול סדרה ששואפת לאפס ולכן לפי משפט $f(x_n)\to 0$. זה נכון לכל סדרה x_n כנ"ל ולכן לפי היינה הגבול הינו אפס.

3. הוכיחו לפי הגדרת קושי ש $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{2}$

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$ צ"ל $\delta>0$ כך שאם $0<|x-1|<\delta$ אזי $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$. נפתח

$$\left|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2-\sqrt{x}-1}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\right|=\left|\frac{1-\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\right|$$

נרצה להיעזר בביטוי $0<|x-1|<\delta$ ולכן נרצה שהביטוי הזה יופיע בפיתוח שבשורה הקודמת. מתקיים: $\left|\frac{1-x}{2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}\right|=\left|\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}\right|=\left|\frac{1-\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\right|$.

$$\left|\frac{1-x}{2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}\right|<\frac{\delta}{2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}$$

אבל $\sqrt{x}+1\geq 1$ ולכן $\frac{1}{2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}\leq\frac{1}{2}$ ולכן $\left|\frac{1-\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\right|<\frac{\delta}{2}$. ניקח $\delta=2\varepsilon$ ונקבל הדרוש.

4. תהי f מוגדרת וחסומה בקטע $[0,1]$. הוכיחו/הפריכו: קיימת נקודה $x_0\in[0,1]$ כך שקיים הגבול $\lim_{x\to x_0}f(x)$

הפרכה: $f=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ מוגדרת וחסומה ב $[0,1]$ ($|f|\leq 1$). אבל ניתן לראות שאין לפונקציה גבול באף נקודה (קל לראות לפי היינה בעזרת סדרות רציונאליות ואי רציונאלית ששואפות ל x_0, או ישירות לפי קושי)

5. נסחו את שלילת הגבול לפי קושי

ניסוח: l אינו הגבול של $f(x)$ בנקודה x_0 אם קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיים x המקיים $0<|x-x_0|<\delta$ וגם $|f(x)-l|\geq\varepsilon$

6. תהי f המוגדרת על ידי $f=\begin{cases}1-x & x\in\mathbb{Q}\\ x^2 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. האם קיימת נקודה a כך שקיים הגבול $\lim_{x\to a}f(x)$? הוכיחו את קביעתכם.

פתרון:

נניח שיש גבול. לכן חייב להתקיים שיש גבול לפי היינה לפי כל שתי סדרות שנבחר. כמו שעשינו בתרגול, נתבונן בסדרת רציונאלים וסדרת אי רציונאליים השואפות ל- a כלשהו,

ונקבל שחייב להתקיים: $1-a=a^2$, כלומר, $a_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. לכן, בכל נקודה ששונה מזה, אין גבול.

כעת, על מנת להוכיח שבנקודות בהן $1-a=a^2$ יש גבול, נפעיל את השיקולים שהפעלנו בתרגול.

7. מצאו את הגבולות הבאים:

a. $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

פתרון: $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}=1$. שימו לב, אם $x\to\infty$ אזי $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

b. $\lim_{x\to-\infty} x\left(x-\sqrt{x^2-\pi^3}\right)$

פתרון: $x\to-\infty$, $\sqrt{x^2-\pi^3}\to\infty$ ולכן $x-\sqrt{x^2-\pi^3}\to-\infty$ ולכן $\lim_{x\to-\infty} x\left(x-\sqrt{x^2-\pi^3}\right)=+\infty$

c. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x}\cdot\frac{x}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x\cdot\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=0$$

d. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right]$

פתרון: $\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1-x}-\frac{2}{(1-x)(1+x)}=\frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)}=\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}=-\frac{1}{1+x}$

מותר לנו לעשות את זה עבור $x\neq 1$, אבל זה בסדר כי הגבול בנקודה $x\to 1$ מדבר על סביבה של אחד אשר לא כוללת את אחד ($0<|x-1|$ לפי קושי, $1\neq x_n\to 1$ לפי היינה). ולכן

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right]=\lim_{x\to 1}-\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{2}$$

e. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+10}{x-5}$

פתרון: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+10}{x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{10}{x}}{1-\frac{5}{x}}=0$

f. $\lim_{x\to\infty}\frac{(x-5)(3x^2-10)}{4x^3-5}$

פתרון: $\lim_{x\to\infty}\frac{(x-5)(3x^2-10)}{4x^3-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-15x^2-10x+50}{4x^3-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{15}{x}-\frac{10}{x^2}+\frac{50}{x^3}}{4-\frac{5}{x^3}}=\frac{3}{4}$

g. $\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x}{3x^7}}$

פתרון: $g(x)=e^x$ רציפה בכל הממשיים, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3x^7}=0$ ולכן

$$\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x}{3x^7}}=\lim_{x\to\infty}g(f(x))=g(0)=e^0=1$$