הצגה פרמטרית של ישר במרחב

דוגמא ג':

מצא הצגה פרמטרית של ישר במישור העובר דרך הנקודות $A(-1,4)$ ו-$B(2,5)$.

פתרון:

דרך א' – בעזרת וקטורים:

הצגה פרמטרית היא $\underline{x} = \underline{a}+t(\underline{b}-\underline{a})$ כאשר $\underline{a} = \overrightarrow{OA}$ (O הראשית)

ו-$\underline{b}-\underline{a} = \overrightarrow{AB}$. כאן $\overrightarrow{OA} = (-1,4)$, וקטור כיוון הוא $\overrightarrow{AB} = (2+1,5-4) = (3,1)$.

לכן הצגה פרמטרית של הישר AB היא: $\underline{x} = \overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB} = (-1,4)+t(3,1)$.

דרך ב' – בעזרת שיעורי נקודות:

הצגה פרמטרית היא $(x_1,x_2) = (a_1,a_2)+t(b_1-a_1,b_2-a_2)$.

כאן $(a_1,a_2) = (-1,4)$, $(b_1,b_2) = (2,5)$.

לכן $\underline{x} = (-1,4)+t(2+1,5-4) = (-1,4)+t(3,1)$.

הערה: ניתן לרשום את ההצגה הנ"ל גם בצורה $\underline{x} = (-1+3t,4+t)$ וכן בצורה

$x_1 = -1+3t$, $x_2 = 4+t$.

דוגמא ז':

נתונות שתי הצגות פרמטריות של ישר במרחב:

(I) $\underline{x} = (1,0,2)+t(1,-1,0)$. (II) $\underline{x} = (0,1,2)+s(2,-2,0)$.

הראה שהן מתארות את אותו הישר.

פתרון:

אחת הדרכים להוכיח ששתי הצגות פרמטריות הן של אותו ישר היא להראות **ששתי נקודות** כלשהן המתקבלות בהצגה הראשונה מתקבלות גם בהצגה השנייה. אנו מסתמכים על כך **שדרך שתי נקודות עובר ישר אחד ויחיד.**

אם נציב בהצגה (I) $t = 0$ ו-$t = 1$ נקבל בהתאמה את הנקודות $(1,0,2)$ ו-$(2,-1,2)$. צריך עכשיו להראות ששתי הנקודות מתקבלות גם ע"י הצגה (II).

כלומר, צריך למצוא s **אחד** המקיים את המערכת: (1) $(1,0,2) = (0,1,2)+s(2,-2,0)$

ו-s **שני** המקיים את המערכת: (2) $(2,-1,2) = (0,1,2)+s(2,-2,0)$.

המשוואות המתקבלות ממערכת (1) הן: $1 = 2s$, $0 = 1-2s$, $2 = 2$.

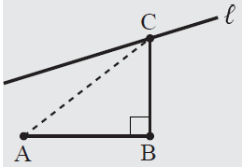
הפתרון $s = \frac{1}{2}$ מקיים את כל שלוש המשוואות.

המשוואות המתקבלות ממערכת (2) הן: $2 = 2s$, $-1 = 1-2s$, $2 = 2$.

הפתרון $s = 1$ מקיים את כל שלוש המשוואות.

כלומר, הנקודות הנ"ל מתקבלות ע"י שתי ההצגות הפרמטריות ולכן הן מייצגות את אותו הישר.

דוגמא ח':



במשולש ישר זווית ABC $(\measuredangle B = 90^{\circ})$ נתון: $A(4,2,3)$, $B(3,0,0)$. מצא את הקודקוד C אם נתון שהוא על הישר $\ell:\ \underline{x} = (3,1,1)+t(2,0,1)$.

פתרון:

אם $C=(x,y,z)$ והיא נמצאת על הישר ℓ אז ישנו t עבורו $(x,y,z)=(3,1,1)+t(2,0,1)$. ז"א $\underline{x} = 3+2t$, $y=1$, $z=1+t$ ולכן $C=(3+2t\,,1\,,1+t)$. עפ"י הנתון $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

הווקטור $\overrightarrow{BA}$ הוא: $\overrightarrow{BA}=(4-3\,,2-0\,,3-0)=(1\,,2\,,3)$,

נביע את הווקטור $\overrightarrow{BC}$ באמצעות t: $\overrightarrow{BC}=(3+2t-3\,,1-0\,,1+t-0)=(2t\,,1\,,1+t)$.

מכאן $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(1\,,2\,,3)\cdot(2t\,,1\,,1+t)=2t+2+3+3t=0$,

כלומר $5t=-5$ ולכן $t=-1$. ע"י הצבה נקבל $C=(3-2\,,1\,,1-1)=(1\,,1\,,0)$.

דוגמא ט':

מצא במישור הצגה פרמטרית של הישר שמשוואתו היא $2x-3y+6=0$.

פתרון:

דרך א' – נמצא שתי נקודות שעל הישר. אם הישר חותך את הצירים אפשר למצוא את נקודות החיתוך עם הצירים. החיתוך עם ציר ה-x הוא בנקודה $(-3,0)$, החיתוך עם ציר ה-y הוא בנקודה $(0,2)$. לכן הצגה פרמטרית היא:

$$\underline{x} = (-3,0)+t(0+3\,,2-0) = (-3,0)+t(3,2).$$

דרך ב' – במשוואת הישר **שני משתנים** לכן מספיק **פרמטר אחד**. נסמן $x=t$ ונחלץ את y מהמשוואה $2t-3y+6=0$, נקבל $y=2+\frac{2}{3}t$. מכאן נקבל הצגה פרמטרית לישר:

$$\underline{x} = (x,y) = (t\,,2+\tfrac{2}{3}t) = (0+t\,,2+\tfrac{2}{3}t) = (0,2)+t(1,\tfrac{2}{3}).$$

(את הווקטור $(0,2)$ מקבלים ע"י שרושמים בכל קואורדינטה את המספר שמופיע **ללא הפרמטר**. את הווקטור $(1,\frac{2}{3})$ מקבלים ע"י שרושמים בכל קואורדינטה את **המקדם של** t שמופיע). בדומה למה שעשינו בדוגמא ז' בעמ' הקודם אפשר להראות שההצגות הפרמטריות שקיבלנו בשתי הדרכים מייצגות את אותו הישר.

הערה:

כאשר פותרים **בדרך ב'** ומקדמי המשתנים במשוואה $ax+by+c=0$ שונים מאפס, כלומר $a\neq 0$ וגם $b\neq 0$, אין חשיבות איזה משתנה מסמנים ב-t. לעומת זאת, אם אחד מהמקדמים **שווה לאפס** חייבים לסמן את **המשתנה שלו בעזרת הפרמטר**.

למשל, אם $a=0$ אז חייבים לסמן $x=t$ ואם $b=0$ אז חייבים לסמן $y=t$.

המקרה $a=b=0$ לא ייתכן. הדוגמא הבאה תבהיר את ההערה.

דוגמא י':

מצא במישור הצגה פרמטרית של הישר שמשוואתו $x-3=0$.

פתרון:

נפתור רק עפ"י **דרך ב'**.

אם נסמן $x=t$ **לא** נוכל למצוא משוואה המקשרת בין x ל-y. לכן נסמן $y=t$.

ברור ש-$x=3$ ולכן הצגה פרמטרית היא: $(x,y)=(3,t)=(3,0)+t(0,1)$.

דוגמא י"א:

הצגה פרמטרית של ישר במישור היא $x=(-2,3)+t(1,4)$. מצא את משוואתו.

פתרון:

דרך א' – נבחר שתי נקודות על הישר, למשל עבור $t=0$ נקבל את הנקודה $(-2,3)$ ועבור $t=1$ נקבל את הנקודה $(-1,7)$. מה שנותר הוא למצוא **משוואת ישר עפ"י שתי נקודות שעליו**.

דרך (I) – עפ"י מה שלמדנו בגיאומטריה אנליטית, אם המשוואה **המפורשת** של הישר היא $y=mx+b$ והשיפוע עפ"י שתי נקודות (x_1,y_1) ו-(x_2,y_2) שהישר עובר דרכן הוא $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, אז $m=\frac{7-3}{-1+2}=\frac{4}{1}=4$. משוואת הישר עפ"י שיפוע ונקודה (x_1,y_1) שעליו היא $y-y_1=m(x-x_1)$, לכן כאן נקבל $y-3=4(x+2)$, כלומר $y=4x+11$ או גם $-4x+y-11=0$.

דרך (II) – אם המשוואה היא $ax+by+c=0$ ונציב את שיעורי הנקודות הנ"ל אז צריך להתקיים: (1) $-2a+3b+c=0$, (2) $-a+7b+c=0$. בדוגמא א' שבעמ' 447 ראינו כיצד לפתור מערכת כזאת. גם כאן הפתרון $a=b=c=0$ אינו מתאים. נחלץ את c ממשוואה (1) ונקבל $c=2a-3b$. הצבת תוצאה זו במשוואה (2) נותנת $a+4b=0$. אם נציב $b=1$ נקבל $a=-4$ ואז $c=2\cdot(-4)-3\cdot 1=-11$. לכן משוואת הישר היא $-4x+y-11=0$.

דרך ב' – אם (x,y) היא נקודה על הישר אז צריך להתקיים $(x,y)=(-2,3)+t(1,4)$. המשוואות המתקבלות הן: (1) $x=-2+t$, (2) $y=3+4t$. ברצוננו למצוא **משוואה המקשרת בין x ל-y ללא הפרמטר** t. אם נחלץ את t ממשוואה (1) נקבל $t=x+2$. ע"י הצבת תוצאה זו במשוואה (2) נקבל $y=3+4(x+2)$ כלומר $-4x+y-11=0$ וזאת משוואת הישר.

הערה:

אם באחת מהמשוואות שבהן מביעים את x ו-y בעזרת t **לא מופיע** הפרמטר t אז סימן שזאת **משוואת הישר**. (הכיוון ההפוך של דוגמא י'). נראה זאת בדוגמא הבאה.

דוגמא י"ב:

מצא במישור את משוואת הישר שהצגה פרמטרית שלו היא $\underline{x} = (4,5)+t(1,0)$.

פתרון:

נפתור רק עפ"י **דרך ב'**: אם $(x,y) = (4,5)+t(1,0)$ אז $x = 4+t$ ו-$y = 5$.

עפ"י ההערה האחרונה, משוואת הישר היא $y-5 = 0$.

הצגה פרמטרית של המישור העובר דרך שלוש הנקודות $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ **ו-**$C(c_1,c_2,c_3)$ **שאינן על ישר אחד היא:**

$$\boxed{(x_1,x_2,x_3) = (a_1,a_2,a_3)+t(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)+s(c_1-a_1,c_2-a_2,c_3-a_3)}$$

עפ"י שיעורי נקודה **אופיינית** שעל המישור נקבל הצגה פרמטרית של המישור בעזרת

קואורדינטות:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= a_1+t(b_1-a_1)+s(c_1-a_1) \\ x_2 &= a_2+t(b_2-a_2)+s(c_2-a_2) \\ x_3 &= a_3+t(b_3-a_3)+s(c_3-a_3) \end{aligned}}$$

דוגמא ב':

נתונות הנקודות $A = (-1,1,0)$, $B = (0,2,3)$, $C = (3,-1,1)$. (ראה הערות בעמ' 474).

א. הוכח ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד.

ב. מצא הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.

פתרון:

א. עפ"י הנתון:

$\underline{u} = \overrightarrow{AB} = (0+1,2-1,3-0) = (1,1,3)$ וכן $\underline{v} = \overrightarrow{AC} = (3+1,-1-1,1-0) = (4,-2,1)$.

אם A, B ו-C הן על ישר אחד אז צריך להיות t כך ש-$\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$, כלומר $(4,-2,1) = t(1,1,3)$. המשוואות המתקבלות הן $4 = t$, $-2 = t$, $1 = 3t$.

למשוואות אין פתרון ולכן A, B ו-C אינן על ישר אחד.

ב. הצגה פרמטרית של המישור היא: $\underline{x} = \underline{a}+t\underline{u}+s\underline{v}$

כלומר: $\underline{x} = (-1,1,0)+t(1,1,3)+s(4,-2,1)$.

הערה: ניתן לרשום גם $\underline{x} = (-1+t+4s,1+t-2s,3t+s)$ וכן $x_1 = -1+t+4s$, $x_2 = 1+t-2s$ ו-$x_3 = 3t+s$.

דוגמא ד':

נתונים הישר $\underline{x} = (2,-1,4)+t(1,1,0)$ והנקודה $A = (3,0,-1)$.

א. הוכח שהנקודה איננה נמצאת על הישר.

ב. מצא הצגה פרמטרית של **המישור העובר דרך הישר והנקודה הנ"ל**.

פתרון:

א. אם הנקודה על הישר אז צריך להיות t כך שמתקיים: $(3,0,-1) = (2,-1,4)+t(1,1,0)$.
המשוואות המתקבלות הן: **(1)** $3 = 2+t$, **(2)** $0 = -1+t$, **(3)** $-1 = 4$.
ממשוואה (3) רואים שאין פתרון ולכן הנקודה איננה על הישר.

ב. בעמ' 327 הבאנו את הדרכים לקביעת מישור. בסעיף ג' ראינו **שישר ונקודה שאיננה עליו קובעים מישור אחד ויחיד**. נראה עכשיו כיצד למצוא מישור כזה. אם במשוואת הישר נציב $t = 0$ נקבל שהנקודה $B = (2,-1,4)$ נמצאת על הישר, לכן הווקטור $\overrightarrow{BA} = (3-2, 0+1, -1-4) = (1,1,-5)$ **נמצא במישור** המבוקש. גם הווקטור $(1,1,0)$, שהוא **וקטור כיוון** של הישר הנתון, **נמצא במישור**. שני הווקטורים **אינם על ישר אחד** ולכן הצגה פרמטרית של המישור היא: $\underline{x} = (2,-1,4)+t(1,1,0)+s(1,1,-5)$.