אינdטגרלים ושיטות אינטגרציה:

חשוב מאוד (למבחן ולחיים) לדעת לחשב אינטגרלים של פונקציות שונות.
זהו עניין טכני בעקרו. ישנן מספר לא גדול של טכניקות אינטגרציה שלמדנו, והדרך הטובה ביותר ללמוד היא פשוט **לתרגל שוב ושוב** עד ששולטים בכל השיטות.
כמובן שלהבין את השיטות והתיאוריה מאחורי חזוב ועוזר, אך בנושא זה גם ההבנה באה במידה רבה דרך תרגול השיטות.
בסיכום זה מובאות רוב השיטות שנלמדו, תוך דגש על האינטגרל הלא מסוים
אותן שיטות (תוך מעקב אחר גבולות האינטגרציה) פועלות גם באינטגרלים מסוימים.
תרגילים רבים ניתן למצוא בכל ספר (למשל האוניברסיטה הפתוחה ובן ציון קון) כמו גם באתרי אינטרנט לרבות באתר הקורס.

מאוד בקצרה – אלו השיטות המרכזיות שנלמדו, ואותן יש ללמוד **ולתרגל**

- רשימת אינטגרליים בסיסיים שכדאי להכיר
- חשבון אינטגרלים (סכום, כפל בקבוע..)
- אינטגרציה בחלקים
- פומקציות רציונליות
- הצבות (שינוי משתנה) (שימו לב לגבולות האינטגרציה במקרה של אינטגרל מסוים)
- הצבות מיוחדות: (כולל טריגונומטריות)
- עבור אינטגרל מסוים - סכומי רימן וחלוקות – שמאפשרים מעבר בין גבול של סכום – לאינטגרל מסוים

כעת אפרט רק מעט על השיטות הנל – אך אין זה תחליף לחומר שנלמד בכתה כמובן

ב. שיטות אינטגרציה:

1. **אינטגרלים מיידיים:** בעמוד הבא מובאת דוגמה לטבלת אינטגרלים שמומלץ להכיר טוב כ"אבני בנין". כאשר משתמשים בהם(במבחן למשל) אין צורך לנמק מדוע זה אכן האנטגרל (אך כתרגיל מומלץ לגזור את אגף ימון ולראות כי מתקבל האינטגרנד בצד שמאל). כמובן שאין זה אומר שחייבים לזכור אינטגרלים אלו בעל-פה. ניתן להסיק אותם מרשימה מצומצמת בהרבה ומעט עבודה☺

$$\int a\,dx = ax + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int (\ln x)dx = x\ln x - x + C$$

$$\int (\sin x)dx = -\cos x + C$$

$$\int (\cos x)dx = \sin x + C$$

$$\int (\tan x)dx = \ln|\sec x| + C$$

$$\int (\cot x)dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int (\sec x)dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int (\csc x)dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int (\sec^2 x)dx = \tan x + C$$

$$\int (\sec x \tan x)dx = \sec x + C$$

$$\int (\csc^2 x)dx = -\cot x + C$$

$$\int (\csc x \cot x)dx = -\csc x + C$$

$$\int (\tan^2 x)dx = \tan x - x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \tfrac{1}{a}\arctan(\tfrac{x}{a}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin(\tfrac{x}{a}) + C$$

.

2. תכונות בסיסיות הנובעות מן ההגדרה של אינטגרל לא מסוים:

1. לכל קבוע a מתקיים: $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
2. $\int (f(x)+g(x))dx = \int g(x)dx + \int f(x)dx$

דוגמאות.השתמשו רק באינטגרלים בסיסיים ותכונותיהם כדי לחשב - $\int \frac{2x^4}{1+x^2}dx, \int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

3. שיטת ההצבה. שיטת ההצבה (או החלפת המשתנה) נובעת מהמשפט הבא:

משפט: תהא $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$ בקטע I, ותהא $x = x(t)$ - פונקציה גזירה לפי t. אזי:

$$\int f(x(t))\cdot x'(t)dt = F(x(t))+C.$$

(שימוש – מציבים x=x(t) ומחשבים dx=x'(t)dt וכך עוברים מאינטגרל ב tלאנטגרל ב x.

לאחר פתרון האנטגרל ב-x יש לחזור למשתנה t.)

דוגמאות : $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx, \int \sqrt{\sin x}\cos x dx, \int \frac{x}{1+x^4}dx$

שימו לב – באנטגרל מסוים –אם מבצעים שינוי משתנה יש צורך לשנות בהתאם את גבולות האינטגרציה, אך אז אין צורך לחזור בסוף למשתנה t. (ראה פירוט בחומר בשיעור) – כדאי לתרגל גם זאת.

4

. אינטגרציה בחלקים.

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv'dx = uv - \int u'vdx.$$

דוגמאות:. $\int \arctan(x)dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx \quad \int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

5. אינטגרציה של פונקציות רציונאליות.

הגדרה: ***פונקציה רציונאלית*** היא שבר, שהמונה והמכנה שלו הם פולינומים.

פונקציה רציונאלית ***הגונה*** או ***פשוטה*** היא פונקציה רציונאלית שבה מעלת הפולינום במונה קטנה ממש ממעלת הפולינום במכנה.

אינטגרציה של פונקציה רציונלית מתבססת על שלושה שלבים:

1. הצגת הפונקציה כפולינום + פונקציה רציונלית הגונה (בעזרת חלוקת פולינומים – תרגלו למשל :

$\frac{x^2+1}{x+1}$, $\frac{x^5+1}{x^3+x^2+1}$.)

2. הצגת הפונקציה הרציונלית ההגונה כסכום של שברים יסודיים (פירוט בהמשך)

3. אינטגרציה של השברים היסודיים.

אפרט כאן בעיקר על סעיף 3, 2 יוסף בהמשך(והיה בשעור): י

אינטגרציה של שברים יסודיים 1. $\int \frac{dx}{x+\alpha} = \ln|x+\alpha| + C$

.2 $(k>1)$ $\int \frac{dx}{(x+\alpha)^k} = \frac{1}{(1-k)(x+\alpha)^{k-1}} + C$

.3 $\int \frac{dx}{x^2+m^2} = \frac{1}{m^2}\int \frac{dx}{(x/m)^2+1} = \frac{1}{m}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{m}\arctan t + C = \frac{1}{m}\arctan\frac{x}{m} + C$.

.4 אם הפונקציה היא מהצורה $1/(x^2+bx+c)$ יש לבצע השלמה לריבוע, כמו בדוגמה הבאה:

השלמה לריבוע: $\int \frac{dx}{x^2+x+2} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C$.

לבסוף , נשאר לטפל בגורמים מהצורה $I_k = \int \frac{dx}{(x^2+1)^k}$ **(ואם צריך , להשתמש בהשלמה לריבוע)**

נוסחת נסיגה לאינטגרל: $I_k = \int \frac{dx}{(x^2+1)^k}$ **עבור** $k>1$:

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+1)^k} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^k}dx = \underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+1)^{k-1}}}_{I_{k-1}} - \underbrace{\int \frac{x^2}{(x^2+1)^k}dx}_{I}$$

בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$\left[\begin{array}{ll} f = x \quad \rightarrow & f' = 1 \\ g = \frac{1}{2(1-k)(x^2+1)^{k-1}} \quad \rightarrow & g' = \frac{x}{(x^2+1)^k} \end{array}\right]$$

נחשב:

$$I = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^k}dx = \frac{1}{2(1-k)}\left[\frac{x}{(x^2+1)^{k-1}} - I_{k-1}\right]$$

ובסה"כ:

$$I_k = \frac{1}{2(k-1)}\left[(2k-1)I_{k-1} + \frac{x}{(x^2+1)^{k-1}}\right].$$

לא אפרט כאן על כיצד מציגים פונקציה רציונלית כשברים יסודיים – אך הנה דוגמה:

דוגמה: חשב: $I = \int \frac{dx}{x^3+1}$. $\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x^2-x+1)(x+1)}$

נחפש קבועים A,B,C כך ש $\frac{1}{x^3+1}=\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+\frac{C}{x+1}$ נקבל $\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)$

$$I=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{4}\right)+C$$

6. ההצבה: $\frac{ax+b}{cx+d}=t^m$ **עבור פונקציות מהצורה:** $R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{k}{m}}\right)$

דוגמה.. $I=\int\frac{dx}{(x+1)^{1/2}+(x+1)^{1/3}}$ נציב $x+1=t^6$: $I=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}dt=6\int\frac{t^3}{t+1}dt$.

7. הצבות טריגונומטריות.

עבור פונקציות מהצורה : $n,m\in\mathbb{Z}\quad \sin^m x\cos^n x$:

אם m אי-זוגי נציב: $t=\cos x$, אם n אי-זוגי נציב: $t=\sin x$

דוגמאות:

$$\int\frac{dx}{\sin x}\ ,\ \int\sin^7 x\cdot\cos^4 x\,dx$$

8. ההצבה האוניברסאלית: $t=\tan\frac{x}{2}$ עבור פונקציות מהצורה: $R(\sin x,\cos x,\tan x)$

מתוך ההצבה מתקבל:

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=2t\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{2t}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-\frac{4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{1+2t^2+t^4-4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{\left(1-t^2\right)^2}{\left(1+t^2\right)^2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x=2\arctan t\ \rightarrow\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

דוגמאות: $\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C\ ,\ \int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$

ג. **האינטרל המסוים**: בנוסף לשיטות עבור המקרה הלא מסוים – ניתן גם להשתמש בהגדרה של האינטגרל כגבול של סכומי רימן מתאימים, או כשטח (עם סימן). זה מאפשר למשל לעבור בין חישוב אינטגרל לחישוב של טור – כמו סכום של i^2/n מ 1 עד n וכדומה. שימו לב – כי לרוב נשתמש עבור סכום הרימן בחלוקה האחידה – ונקודות הדגימה גם הן תהיינה פשוטות

דוגמה – חשבו בעזרת אינטגרל רימן אתהגבול $\lim(n\text{->}\infty)\ (1+2+3+4+5\ldots+n)/n^2$

חשבו את $\lim\ (n\text{->}\infty)\ (1/n)(\Sigma^n_{i=1}\ 1/(1+i^2))$