פתרון לינארית 2 תשפ"ג סמסטר ב מועד א

מרצים: ד"ר עדי בן צבי, אריאל ויצמן.
מתרגלים: אריאל ויצמן, נעה כהן, כנה נהיר, אלעד עטייא, ניר שרייבר.
יש לענות על **כל** שאלות הבחינה. ניתן להגיע עד 104 נק'. אין חומר עזר.
זמן הבחינה: 3 שעות.
המלצה חמה: התחילו עם השאלות בהן אתם מרגישים בטוחים יותר. יש לכתוב את כל התשובות על טופס הבחינה.
יש לכתוב את כל התשובות על טופס הבחינה. יש להוכיח ולנמק בכל אחת מן השאלות.

1. (15 נק') הוכיחו את משפט ההצגה של ריס: יהי V ממ"פ מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהא $T : V \to \mathbb{F}$ הע"ל. הוכיחו שקיים $\overrightarrow{a} \in V$ יחיד כך ש:

$$\forall v \in V : T(v) = \langle v, \overrightarrow{a} \rangle$$

2.

(א) (8 נק') נתבונן במרחב הוקטורי $V = \mathbb{R}^3$ עם המ"פ הבאה (אין צורך להוכיח שזו מ"פ):

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$$

נסמן $W = sp\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. מצאו את ההיטל של $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ על W.

פתרון:

נשים לב שבמ"פ הנתונה הבסיס $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ לא או"ג, ולכן צריך תחילה לעשות תהליך גראם-שמידט:

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

בסה"כ הבסיס החדש הוא:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

עכשיו רוצים לחשב את ההיטל של v. הנוסחה היא:

$$= \frac{\langle w_1, v\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{\langle w_2, v\rangle}{\|w_2\|^2} w_2$$

אצלנו:

$$= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|^2} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{-2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\frac{1}{9}(8+36)}{\frac{1}{9}(16+8+27)} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{44}{51} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(ב) (6 נק') יהי V ממ"פ, יהי $W \leq V$ ת"מ, ויהי $v \in V$. נסמן:

$$u = \pi_W(v)$$

כלומר, u הוא ההיטל של v על W. חשבו את $\pi_{W^\perp}(u)$ (ההיטל של u על $W^\perp$).

<u>פתרון:</u>

נשים לב שמתקיים:

$$u \in W$$

ולכן לפי משפט (היטל של וקטור מהמרחב הניצב לזה שעליו מטילים הוא 0, והרי $\left(W^\perp\right)^\perp = W$) נקבל:

$$\pi_{W^\perp}(u) = 0$$

3. אין קשר בין הסעיפים הבאים (7 נק' לכל סעיף):

(א) יהיו $x, y, z, w \geq 0$ ממשיים כך ש $x + y + z + w = 4$. מצאו את:

$$\max\left\{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{w}\right\}$$

<u>פתרון:</u>

נתבונן במרחב $V = \mathbb{R}^4$ עם מ"פ סטנדרטית. נגדיר:

$$v = \begin{pmatrix} \sqrt{x} \\ \sqrt{y} \\ \sqrt{z} \\ \sqrt{w} \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לפי קושי שוורץ מתקיים:

$$|\langle v, u\rangle| \leq \|v\| \cdot \|u\|$$

אצלנו נקבל:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{w}=|\langle v,u\rangle|\leq\|v\|\cdot\|u\|=\sqrt{x+y+z+w}\cdot\sqrt{4}$$

ולכן לפי הנתון:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{w}\leq\sqrt{x+y+z+w}\cdot\sqrt{4}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}=4$$

בנוסף, עבור $x=y=z=w$ מתקבל שיוויון, ולכן זה המקסימום.

(ב) האם המטריצה הבאה לכסינה? נמקו היטב:

$$A=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{10\times10}$$

<u>פתרון:</u>

נתחיל טיפה עם חישוב, פיתוח לפי שורה ראשונה ייתן לנו:

$$\det(xI-A)=(x-1)\det\begin{pmatrix} x-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&x-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&x-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&x-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&x-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&x-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&x-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&x-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&x-1 \end{pmatrix}$$

אבל שימו לב שדטרמיננטה זו היא פ"א של מטריצה שכל רכיביה הם 1, ומכיון שכך אנחנו יודעים את שני הדברים הבאים: ראשית, 0 ע"ע עם $g_0=8$ כי רק שורה אחת בת"ל. שנית, סכום כל שורה הוא 9 ולכן 9 ע"ע עם $k_9\geq1$ ולכן גם $g_9\geq1$. בנוסף, מתחילת הפיתוח אנחנו מקבלים

$$(x-1)|p_A(x)$$

מה שאומר 1 ע"ע עם $k_1\geq1$ ולכן גם $g_1\geq1$. בסה"כ יוצא שסך הריבויים הגיאומטריים הוא 10 ולכן יש בסיס המורכב מוקטורים עצמיים ולכן לכסינה.

(ג) הוכיחו/הפריכו: אם $\lambda\neq0$ ע"ע של $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אז λ^2 ע"ע של AA^t.

<u>הפרכה:</u>

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

יש כאן ע"ע יחיד 1. נבדוק מה קורה עם AA^t:

$$AA^t=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$$

נבדוק מה ע"ע (נסמן את התוצאה ב B):

$$p_B(x) = (x-2)(x-1) - 1 = x^2 - 3x + 1$$

ומה השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Z}$$

ולכן 1 לא ע"ע.

4. תהא $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ כך ש

$$\forall i,j : A_{i,j} \in \mathbb{R}$$

המקיימת: $\text{rank}(A) = 3$, המטריצה $A - (1+i)I$ לא הפיכה, וגם $tr(A) = 0$.

(א) (10 נק') מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A (עד כדי סדר הבלוקים).

פתרון:

0 ע"ע עם $g_0 = 2, k_0 \geq 2$. בנוסף, $1+i, 1-i$ ע"ע עם ר"א לפחות 1. נסמן את הע"ע החמישי (מעל המרוכבים תמיד יש n ע"ע) ב λ. נקבל:

$$tr(A) = 2\cdot 0 + 1 + i + 1 - i + \lambda = 2 + \lambda$$

מהנתון על העקבה נקבל $\lambda = -2$, ולכן $k_0 = 2$, ור"א של $1+i, 1-i, -2$ הוא בדיוק 1 (כי אין מקום ליותר, הרי סכום ר"א הוא 5), ולכן A לכסינה ודומה לצורת ז'ורדן הבאה:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1+i & & \\ & & & 1-i & \\ & & & & -2 \end{pmatrix}$$

(ב) (8 נק') נגדיר פולינום

$$f(x) = x^2 - 9x + 20$$

האם המטריצה $f(A)$ הפיכה? נמקו היטב.

פתרון:

נשים לש:

$$f(A) = (A - 4I)(A - 5I)$$

כעת, 4 איננו ע"ע ולכן $A - 4I$ הפיכה, בדומה 5 איננו ע"ע ולכן $A - 5I$ הפיכה, ולכן $f(A)$ הפיכה כמכפלת הפיכות.

5. נתבונן בממ"פ $\mathbb{C}^n$ עם המ"פ הסטנדרטית (כלומר, $\langle v,u\rangle = v^t\overline{u}$ או במילים אחרות: $\langle v,u\rangle = \sum_{k=1}^n v_k \cdot \overline{u_k}$).

(א) (6 נק') תהא $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. הוכיחו: $A + A^*$ הרמיטית.

(ב) (8 נק') תהא $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ המקיימת

$$\forall v \in \mathbb{C}^n : \langle Av, v\rangle = 0$$

הוכיחו: A נילפוטנטית.

(ג) (10 נק') הוכיחו שאם $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה הרמיטית המקיימת

$$\forall v \in \mathbb{C}^n : \langle Mv, v\rangle = 0$$

אז $M = 0$.

(ד) (12 נק') תהא $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ המקיימת

$$\forall v \in \mathbb{C}^n : \langle Av, v\rangle = 0$$

הוכיחו: $A = 0$.

<u>פתרון:</u>

א. פשוט:

$$(A + A^*)^* = A^* + (A^*)^* = A^* + A = A + A^*$$

ב. נראה ש0 ע"ע יחיד (הערה: יש n ע"ע כי מעל המרוכבים): יהי λ ע"ע, ויהי v ו"ע שלו ניתן להניח $\|v\| = 1$ (כי כפולה בסקלאר עדיין ו"ע). נקבל:

$$\lambda = \lambda\|v\| = \lambda \langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = 0$$

לכן 0 ע"ע יחיד, ולכן נילפוטנטית.

ג. מסעיף ב נקבל נילפוטנטית. מכיון שהיא הרמיטית נקבל שהיא לכסינה אוניטרית (כי הרמיטית גורר נורמלית, ומעל המרוכבים פ"א מל"ל). M לכסינה ונילפוטנטית ולכן (פ"מ מל"ל שונים):

$$m_M(x) = x$$

ולכן

$$0 = m_M(M) = M$$

ד. נשים לב:

$$\forall v : 0 = \langle Av, v\rangle = \langle v, A^* v\rangle$$

ולכן נקבל:

$$\forall v : \langle A^* v, v\rangle = \overline{\langle v, A^* v\rangle} = \overline{0} = 0$$

כעת, נקבל ש$A + A^*$ הרמיטית המקיימת:

$$\forall v : \langle (A + A^*)\, v, v\rangle = \langle Av, v\rangle + \langle A^* v, v\rangle = 0 + 0 = 0$$

ולכן $A + A^* = 0$ ולכן $A = -A^*$, ולכן A נורמלית:

$$AA^* = -A^2 = A^* A$$

ובדומה לסעיף קודם A נורמלית ונילפוטנטית ולכן $A = 0$.

בהצלחה!!

<u>שאלה 1:</u> (15 נק') הוכיחו את משפט ההצגה של ריס: יהי V ממ"פ מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהא $T : V \to \mathbb{F}$ הע"ל.
הוכיחו שקיים $\overrightarrow{a} \in V$ יחיד כך ש:

$$\forall v \in V : T(v) = \langle v, \overrightarrow{a} \rangle$$

<u>פתרון שאלה 1:</u>

המשך פתרון שאלה 1

שאלה 2:

א. (8 נק') נתבונן במרחב הוקטורי $V=\mathbb{R}^3$ עם המ"פ הבאה (אין צורך להוכיח שזו מ"פ):

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$$

נסמן $W = sp\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. מצאו את ההיטל של $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ על W.

ב. (6 נק') יהי V ממ"פ, יהי $W \leq V$ ת"מ, ויהי $v \in V$. נסמן:

$$u = \pi_W(v)$$

כלומר, u הוא ההיטל של v על W. חשבו את $\pi_{W^\perp}(u)$ (ההיטל של u על $W^\perp$).

פתרון שאלה 2:

המשך פתרון שאלה 2

שאלה 3: אין קשר בין הסעיפים הבאים (7 נק' לכל סעיף):
א. יהיו $x, y, z, w \geq 0$ ממשיים כך ש $x + y + z + w = 4$. מצאו את:

$$\max\left\{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{w}\right\}$$

ב. האם המטריצה הבאה לכסינה? נמקו היטב:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{10\times 10}$$

ג. הוכיחו/הפריכו: אם $\lambda \neq 0$ ע"ע של $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אז λ^2 ע"ע של AA^t.
<u>פתרון שאלה 3:</u>

המשך פתרון שאלה 3

המשך פתרון שאלה 3

שאלה 4: תהא $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ כך ש

$$\forall i,j : A_{i,j} \in \mathbb{R}$$

המקיימת: $\mathrm{rank}(A) = 3$, המטריצה $A - (1+i)I$ לא הפיכה, וגם $tr(A) = 0$.

א. (10 נק') מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A (עד כדי סדר הבלוקים).

ב. (8 נק') נגדיר פולינום

$$f(x) = x^2 - 9x + 20$$

האם המטריצה $f(A)$ הפיכה? נמקו היטב.

פתרון שאלה 4:

המשך פתרון שאלה 4

המשך פתרון שאלה 4

שאלה 5: נתבונן בממ"פ $\mathbb{C}^n$ עם המ"פ הסטנדרטית (כלומר, $\langle v,u\rangle = v^t\overline{u}$ או במילים אחרות: $\langle v,u\rangle = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot \overline{u_k}$).

א. (6 נק') תהא $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. הוכיחו: $A + A^*$ הרמיטית.

ב. (8 נק') תהא $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ המקיימת

$$\forall v \in \mathbb{C}^n : \langle Av, v\rangle = 0$$

הוכיחו: A נילפוטנטית.

ג. (10 נק') הוכיחו שאם $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה הרמיטית המקיימת

$$\forall v \in \mathbb{C}^n : \langle Mv, v\rangle = 0$$

אז $M = 0$.

ד. (12 נק') תהא $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ המקיימת

$$\forall v \in \mathbb{C}^n : \langle Av, v\rangle = 0$$

הוכיחו: $A = 0$.

פתרון שאלה 5:

המשך פתרון שאלה 5

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___