

פתרון מבחן מועד ב' – 86-147 חדו"א 1 לאודיסאה – 30/03/25

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משך המבחן: שלוש שעות

מרצה: דר' ארז שיינר

כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100

ענו על כל השאלות

משקל כל שאלה: 20 נק'

יש לכתוב את התשובות על גבי טופס המבחן במקום המתאים בלבד. מותר לכתוב משני צידי הדף.

מחברות הטיוטה מושלכות ולא תבדקנה.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n}$

ב. $\lim_{x \rightarrow \pi} (-\cos(x))^{\frac{1}{x-\pi}}$

א. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x}-1)^3 (2-e^{2x})^2}{(1-\cos(5x)) \ln(1+7x)}$

בדיוק כמו מועד א'.

2.

א. חשבו את $\int x^2 e^{2x} dx$.

$$\int x^2 e^{2x} dx = \left\{ \begin{array}{ll} f' = e^{2x} & g = x^2 \\ f = \frac{1}{2} e^{2x} & g' = 2x \end{array} \right\} = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} f' = e^{2x} & g = x \\ f = \frac{1}{2} e^{2x} & g' = 1 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \right) = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

ב. חשבו את $\int \frac{1}{x(x-1)(x-2)} dx$.

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

נעשה מכנה משותף ונשווה מונים

$$1 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)$$

נציב $x = 0, 1, 2$ ונקבל

$$1 = 2A$$

$$1 = -B$$

$$1 = 2C$$

כלומר

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-2}$$

$$\int \frac{1}{x(x-1)(x-2)} dx = \frac{1}{2} \ln|x| - \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x-2| + C$$

3.

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $\sin(x) = x$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = \sin(x) - x$$

$$h'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$$

לכן הפונקציה תמיד יורדת, ויש לכל היותר פתרון אחד.

כיוון ש $h(0) = 0$, יש לפחות פתרון אחד.

סה"כ בדיוק פתרון יחיד.

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $2 \cos(x) = x^2$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = 2 \cos(x) - x^2$$

$$h'(x) = -2 \sin(x) - 2x = -2(\sin(x) + x)$$

למשוואה $\sin(x) + x = 0$ יש בדיוק פתרון אחד כאשר $x = 0$, עם הוכחה דומה לסעיף א'.

כיוון ש $h'(\pi) < 0$ וכן $h'(-\pi) > 0$ נובע כי h עולה בתחום $(-\infty, 0]$ ויורדת בתחום $[0, \infty)$.

לכן יש לכל היותר שני פתרונות.

כיוון ש $h(0) = 2$, וכן $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < 0$ וכן $h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 < 0$ וכיוון שהפונקציה רציפה, לפי משפט ערך הביניים היא

מתאפסת בתחום $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ וכן בתחום $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ וסה"כ בדיוק שני פתרונות למשוואה.

4. תהי f פונקציה הגזירה בנק' x_0 , ונביט ב $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

א. הוכיחו או הפריכו: אם למשוואה $f(x) = g(x)$ יש אינסוף פתרונות, אזי $f(x)$ היא קו ישר.

הפרכה: נביט בפונקציה $f(x) = \cos(x)$ בנק' $x_0 = 0$.

$$g(x) = 1$$

וכמובן שיש אינסוף פתרונות למשוואה $\cos(x) = 1$ ואילו $\cos(x)$ אינה קו ישר.

ב. הוכיחו או הפריכו: אם לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f''(x) > 0$ אזי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) \geq g(x)$.

הוכחה:

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

$$h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$

$$h''(x) = f''(x) > 0$$

לכן $h'(x)$ פונקציה עולה.

כיון ש $h'(x_0) = 0$ נובע כי h' שלילית עד x_0 וחיובית אחריו.

לכן h יש מינימום גלובלי ב x_0

כיון ש $h(x_0) = 0$ נובע כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $h(x) \geq 0$ כפי שרצינו.

5. תהי סדרה a_n סדרה חיובית ומונטונית יורדת, ותהי $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$.

א. הוכיחו כי S_{2n-1} מונטונית יורדת.

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)-1} - S_{2n-1} &= S_{2n+1} - S_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} a_k - \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} a_k = \\ &= \sum_{k=2n}^{2n+1} (-1)^{k+1} a_k = a_{2n+1} - a_{2n} \leq 0 \end{aligned}$$

ב. הוכיחו כי S_{2n-1} מתכנסת לגבול סופי.

$$S_{2n-1} = a_1 - a_2 + \dots - a_{2n-2} + a_{2n-1} = a_1 + (-a_2 + a_3) + \dots + (-a_{2n-2} + a_{2n-1}) \geq a_1 > 0$$

כלומר S_{2n-1} סדרה מונטונית וחסומה מלרע ע"י a_1 ולכן מתכנסת לגבול סופי.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2\left(\frac{k}{n}\right)}{n}$$

כיון ש $f(x) = \sin^2(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$ אזי

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sin^2(x) dx$$

כעת

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2 \sin^2(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

ולכן

$$\int_0^1 \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \sin(2) - 0 + 0 \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin(2)$$

ב. הוכיחו כי $\sqrt{5} > \sqrt[3]{9}$.

מעבר לפתרון בעזרת טיילור אפשר פשוט להעלות בריבוע, ולהוכיח את אי השיוויון השקול

$$5 > \sqrt[3]{81}$$

או

$$\sqrt[3]{125} > \sqrt[3]{81}$$

שזה כמובן נכון.