

תרגיל בית 5 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1 (חימום). הוכיחו ששדות הפיצול של $(x^2 - 2x - 2)(x^2 + 1)$ ושל $x^5 - 3x^3 + x^2 - 3$ מעל \mathbb{Q} זהים זה לזה.

שאלה 2. תהי K/F הרחבת שדות ויהיו $f, g \in F[x]$ פולינומים עם שדות פיצול L_1, L_2 בהתאמה. הוכיחו כי תת-השדה הכי קטן של K שמכיל את L_1 ו- L_2 הוא גם שדה פיצול מעל F (אולי של פולינום אחר).

שאלה 3. יהי פולינום $f(x) \in F[x]$, ויהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כל שורשי הפולינום. הוכיחו כי שדה הפיצול של $f(x)$ מעל F הוא $F[\alpha_2, \dots, \alpha_n]$.

שאלה 4. תהי K/F הרחבת שדות ממימד 2. הסיקו מהשאלה הקודמת ש- K הוא שדה פיצול של פולינום כלשהו ב- $F[x]$.

שאלה 5. יהיו $a_1, \dots, a_n \neq \pm 1$ מספרים טבעיים חופשיים מריבועים וזרים בזוגות. הוכיחו כי $[\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}) : \mathbb{Q}] = 2^n$.

בהצלחה!