אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 4 – פיתרון

טענת עזר שנשתמש בה בכל התרגילים

טענת עזר: יהיו $F \subseteq K \subseteq L$ שדות ו-$a \in L$ אלגברי מעל F. נניח ש-$[K:F] < \infty$. אזי אם $\gcd([K:F],[F[a]:F]) = 1$, אז $[K[a]:F] = [K:F] \cdot [F[a]:F]$. (למעשה, זה אם ורק אם.)

הוכחה: $K, F[a]$ הם תתי שדות של $K[a]$ ולכן $[K[a]:F]$ מתחלק ב-$[K:F]$ וב-$[F[a]:F]$. מכאן נובע כי $[K[a]:F]$ מתחלק ב-$[K:F] \cdot [F[a]:F] = \frac{[K:F]\cdot[F[a]:F]}{\gcd([K:F],[F[a]:F])} = \operatorname{lcm}([K:F],[F[a]:F])$. אבל $[K[a]:F] = [K[a]:K] \cdot [K:F] \leq [F[a]:F][K:F]$ ולכן $[K[a]:F] = [K:F] \cdot [F[a]:F]$. **משל.**

מסקנה: אם $F \subseteq L$ ו-$a, b \in L$ אלגבריים ו-$\gcd([F[a]:F],[F[b]:F]) = 1$ אז: $[F[a,b]:F] = [F[a]:F] \cdot [F[b]:F]$.[1]

הוכחה: נגדיר $K = F[b]$ ונשתמש בטענת העזר.

שאלה 1

חשבון (עם הצדקה):

1. $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}, \sqrt{5+\sqrt{5}}\right] : \mathbb{Q}\right]$
2. $\left[\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{10}, \sqrt[6]{5}] : \mathbb{Q}[\sqrt{5}]\right]$

פיתרון

פתרון 1: נסמן $\alpha = \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ ו-$\beta = \sqrt{5+\sqrt{5}}$. מתקיים:

$$0 = (\beta^2-5)^2 - 5 = \beta^4 - 10\beta^2 + 20$$

$$0 = (\alpha^3-3)^3 - 3 = \alpha^9 - 9\alpha^6 + 27\alpha^3 - 30$$

קיבלנו ש-α מאפס פולינום אייזנשטיין (ביחס ל-3) ממעלה 9 ו-β מאפס פולינום אייזנשטיין (ביחס ל-5) ממעלה 4. לכן, $[\mathbb{Q}[\alpha]:\mathbb{Q}] = 9$ ו-$[\mathbb{Q}[\beta]:\mathbb{Q}] = 4$. 4 ו-9 הם מספרים זרים ולכן לפי טענת העזר $[\mathbb{Q}[\alpha,\beta]:\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[\alpha]:\mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}[\beta]:\mathbb{Q}] = 9 \cdot 4 = 36$.

פתרון 2: מתקיים $3 = \frac{6}{2} = \frac{[\mathbb{Q}[\sqrt[6]{5}]:\mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}[\sqrt{5}]:\mathbb{Q}]} = \left[\mathbb{Q}[\sqrt[6]{5}]:\mathbb{Q}[\sqrt{5}]\right]$.[2]

בנוסף, מתקיים $\alpha := \sqrt{2}+\sqrt{10} = \sqrt{2}(1+\sqrt{5})$ ולכן α שורש של הפולינום $x^2 - 2\left(1+\sqrt{5}\right)^2 \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}][x]$. זה אומר ש-$\left[\mathbb{Q}[\alpha,\sqrt{5}]:\mathbb{Q}[\sqrt{5}]\right] \leq 2$. כדי להראות שוויון מספיק לבדוק ש-$\alpha \notin \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$: אם לא, אז $\sqrt{2} = \frac{\alpha}{\sqrt{5}+1} \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$. ממשיכים כמו שעשינו עם דוגמאות דומות בכיתה [או באופן דומה לתרגיל בית 3 שאלה].

---

[1] זהירות: אם לא מניחים $\gcd([F[a]:F],[F[b]:F]) = 1$ אז יתכן ש-$[F[a,b]:F] \neq [F[a]:F] \cdot [F[b]:F]$.

[2] הערה: בשלב זה של הקורס כבר אין צורך להוכיח ש-$[\mathbb{Q}[\sqrt[n]{a}]:\mathbb{Q}] = n$ עבור a "מספיק טוב" (לדוגמא, a ראשוני).

לכן, $\left[\mathbb{Q}[\alpha,\sqrt{5}]:\mathbb{Q}[\sqrt{5}]\right]=2$ ו-$\left[\mathbb{Q}[\sqrt[6]{5}]:\mathbb{Q}[\sqrt{5}]\right]=3$ ומטענת העזר נובע $\left[\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{10},\sqrt[6]{5}]:\mathbb{Q}[\sqrt{5}]\right]=2\cdot 3=6$.

הערה: למעשה, $\sqrt{5}\in\mathbb{Q}[\alpha]$.

שאלה 2

1. הוכיחו: $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}]=\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$.
2. מצאו שדה $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]\neq K\subseteq\mathbb{C}$ איזומורפי ל-$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$. הוכיחו כי השדות איזומורפיים אך שונים כקבוצות.

[אין קשר בין הסעיפים.]

פיתרון

הוכחת 1: $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]\ni\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5})^2$ ולכן $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}]\subseteq\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$.

כדי להראות הכלה בכוון השני נסמן $\alpha=\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}$ ונשים לב ש-$\mathbb{Q}[\alpha]$ הוא תת שדה של $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$. לכן, $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]:\mathbb{Q}]=3\mid[\mathbb{Q}[\alpha]:\mathbb{Q}]$. זה אומר ש-$[\mathbb{Q}[\alpha]:\mathbb{Q}]\in\{1,3\}$. אם $[\mathbb{Q}[\alpha]:\mathbb{Q}]=1$ אז קיים $q\in\mathbb{Q}$ כך ש-$q=\alpha=\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5})^2$. זה אומר ש-$\sqrt[3]{5}$ מתאפס על ידי פולינום ממעלה 2 – סתירה לכך שהפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{5}$ הוא ממעלה 3. לכן, בהכרח $[\mathbb{Q}[\alpha]:\mathbb{Q}]=3$ וזה אומר ש-$\mathbb{Q}[\alpha]=\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$. **משל.**

הערה: אפשר להראות גם ישירות ש-$\sqrt[3]{5}\in\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}]$.

פיתרון 2: נסמן $\rho_3=\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$ (שורש שלישי 1) ונגדיר $K=\mathbb{Q}[\rho_3\sqrt[3]{5}]\subseteq\mathbb{C}$.

$K\neq\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$ כי $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]\subseteq\mathbb{R}$ אבל $\rho_3\sqrt[3]{5}\in K\setminus\mathbb{R}$.

כדי לראות ש-$K\cong\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$ נשים לב ש-$\sqrt[3]{5},\rho_3\sqrt[3]{5}$ הם שורשים של x^3-5 שהוא אי פריק מעל $\mathbb{Q}$ (אייזנשטיין ביחס ל-5) ולכן $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]\cong\mathbb{Q}[x]/\langle x^3-5\rangle\cong\mathbb{Q}[\rho_3\sqrt[3]{5}]=K$.

<u>למי שעוד לא מבין למה $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]\cong\mathbb{Q}[x]/\langle x^3-5\rangle$:</u> אם $E\subseteq F$ שדות ו-$\alpha\in E$ עם פולינום מינימלי f אז יש העתקת חוגים $\psi: F[x]\to E$ המוגדרת ע"י $\psi(f(x))=f(\alpha)$. לפי הגדרת הפולינום המינימלי, הגרעין של ψ הוא $\langle f\rangle$ ולפי ההגדרה $F[\alpha]=\operatorname{image}\psi$ (התמונה של ψ). לכן, לפי משפט האיזומורפיזם הראשון, $F[x]/\langle f\rangle=F[x]/\ker\psi\cong\operatorname{image}\psi=F[\alpha]$. לסיכום, קיבלנו ש-$F[x]/\langle f\rangle\cong F[\alpha]$.

שאלה 3

מצא את שדות הפיצול של הפולינומים הבאים מעל $\mathbb{Q}$. חשב את המימד שלהם.

1. x^4-9x^2+8
2. x^7-7
3. x^6-x^3-2

פיתרון

הערה: בסעיפים השונים נשתמש בעובדה הבאה (שהיא די קלה להוכחה ואתם רשאים להשתמש בה): תהי E/F הרחבת שדות אלגברית, $a \in E$ ו-$b \in F$, אזי $F[a] = F[a+b] = F[ab]$.

פיתרון 1: $x^4 - 9x^2 + 8 = (x^2-1)(x^2-8) = (x+1)(x-1)(x+\sqrt{8})(x-\sqrt{8})$.

לכן, שדה הפיצול הוא $\mathbb{Q}[\sqrt{8}, -\sqrt{8}] = \mathbb{Q}[\sqrt{8}] = \mathbb{Q}[2\sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. המימד של שדה הפיצול מעל $\mathbb{Q}$ הוא 2.

פיתרון 2: יהי $\rho_7 = \exp\left(\frac{2\pi i}{7}\right)$ - שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 7. השורשים של $x^7 - 7$ הם $\sqrt[7]{7}, \rho_7\sqrt[7]{7}, \dots, \rho_7^6\sqrt[7]{7}$ ולכן שדה הפיצול הוא $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{7}, \rho_7] = \mathbb{Q}[\sqrt[7]{7}, \rho_7\sqrt[7]{7}, \dots, \rho_7^6\sqrt[7]{7}]$.

מתקיים $[\mathbb{Q}[\sqrt[7]{7}]:\mathbb{Q}] = 7$ ובתרגול הראינו שהפולינום המינימלי של ρ_7 הוא ממעלה 6 ולכן $[\mathbb{Q}[\rho_7]:\mathbb{Q}] = 6$. היות ו-6,7 זרים, לפי טענת העזר $[\mathbb{Q}[\sqrt[7]{7}, \rho_7]:\mathbb{Q}] = 6 \cdot 7 = 42$.

פיתרון 3: $x^6 - x^3 - 2 = (x^3-2)(x^3+1) = (x^3-2)(x+1)(x^2-x+1)$.

לכן, שורשי הפולינום $x^6 - x^3 - 2$ הם $\sqrt[3]{2}, \rho_3\sqrt[3]{2}, \rho_3^2\sqrt[3]{2}, -1, \rho_6, \rho_6^5$ (באשר $\rho_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$).
[בדקו שהשורשים של $x^2 - x + 1$ הם אכן ρ_6, ρ_6^5.] היות ו-$\rho_6^2 = \rho_3$ השדה $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \rho_6]$ מכיל את כל שורשי הפולינום $x^6 - x^3 - 2$. מצד שני, הוא נוצר ע"י חלק מאותם שורשים ולכן $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \rho_6]$ שדה הפיצול של $x^6 - x^3 - 2$.

מתקיים $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]:\mathbb{Q}] = 3$ ו-$[\mathbb{Q}[\rho_6]:\mathbb{Q}] = 2$ כי הפולינום המינימלי של ρ_6 הוא $x^2 - x + 1$ (הוא אי פריק כי אין לו שורש ב-$\mathbb{Q}$). לכן, לפי טענת העזר $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \rho_6]:\mathbb{Q}] = 2 \cdot 3 = 6$.

הערה: התשובות $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \rho_3]$ ו-$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}]$ גם נכונות כי $\mathbb{Q}[\rho_6] = \mathbb{Q}[\rho_3] = \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ (בדקו!).

שאלה 4

הוכח או הפרך: אם $L \subseteq K \subseteq F$ שדות ו-$\alpha \in L$ אלגברי מעל F, אז $[K:F] \mid [K[\alpha]:F[\alpha]]$.

הפרכה

נבחר $F = \mathbb{Q}, K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}], L = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \rho_3]$ ו-$\alpha = \rho_3\sqrt[3]{2} \in L$.

1. הפולינום $x^3 - 2$ הוא אייזנשטיין (ביחס ל-2) ולכן אי פריק. α ו-$\sqrt[3]{3}$ הם שורשים שלו ולכן $[K:\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[\alpha]:\mathbb{Q}] = \deg(x^3-2) = 3$.
2. מתקיים $K[\alpha] = K\left[\frac{\alpha}{\sqrt[3]{2}}\right] = K[\rho_3] = L$.
3. הפולינום המינימלי של ρ_3 הוא $x^2 + x + 1$ (הוכחנו בשיעור) ולכן $[\mathbb{Q}[\rho_3]:\mathbb{Q}] = 2$. לכן, לפי טענת העזר $[K[\alpha]:\mathbb{Q}] = [K[\rho_3]:\mathbb{Q}] = [K:\mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}[\rho_3]:\mathbb{Q}] = 3 \cdot 2 = 6$.
4. כעת מתקיים: $[K[\alpha]:F[\alpha]] = \frac{[K[\alpha]:\mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}[\alpha]:\mathbb{Q}]} = \frac{6}{3} = 2$ אבל $[K:F] = [K:\mathbb{Q}] = 3$ ו-2 לא מחלק את 3.