הרצאה 8

נכתב על ידי נועם יערי

משפט

$$y^{(n)}=a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_0(x)y+b(x)$$

משוואה לינארית אי הומוגנית ובסיס $\{y_1,\cdots,y_n\}$ לפתרונות המשוואה ההומוגנית הקשורה. אזי הפונקציה:

$$y(x)=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2+\cdots+c_n(x)y_n$$

פותר את המשוואה אם ורק אם:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1+c_2'(x)y_2+\cdots+c_n'(x)y_n=0 \\ c_1'(x)y_1'+c_2'(x)y_2'+\cdots+c_n'(x)y_n'=0 \\ \vdots \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}+c_2'(x)y_2^{(n-1)}+\cdots+c_n'(x)y_n^{(n-1)}=b(x) \end{cases}$$

הוכחה

$\boxed{\Rightarrow}$

נובע מהמערכת:

$$\begin{cases} y'(x)=c_1(x)y_1'+c_2(x)y_2'+\cdots+c_n(x)y_n' \\ y''(x)=c_1(x)y_1''+c_2(x)y_2''+\cdots+c_n(x)y_n'' \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(x)=c_1(x)y_1^{(n-2)}+c_2(x)y_2^{(n-2)}+\cdots+c_n(x)y_n^{(n-2)} \\ y^{(n-1)}(x)=c_1(x)y_1^{(n-1)}+c_2(x)y_2^{(n-1)}+\cdots+c_n(x)y_n^{(n-1)} \\ y^{(n)}(x)=c_1(x)y_1^{(n)}+c_2(x)y_2^{(n)}+\cdots+c_n(x)y_n^{(n)}+b(x) \end{cases}$$

נשים לב שהמערכת הזאת שקולה למשוואה:

$$w\cdot\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{pmatrix}=w^{-1}(x)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

דוגמה

$$y''-\frac{6}{x^2}y=x\cdot\log x$$

$$y_1(x)=x^3, y_1'(x)=3x^2$$

$$y_2(x)=\frac{1}{x^2}, y_2'(x)=-\frac{2}{x^3}$$

$$w(x)=\begin{vmatrix} x^3 & \frac{1}{x^2} \\ 3x^2 & -\frac{2}{x^3} \end{vmatrix}=-2-3=-5$$

$$\Longrightarrow w^{-1}(x) = \begin{vmatrix} \frac{2}{5x^3} & \frac{1}{5x^2} \\ \frac{3}{5}x^2 & -\frac{x^3}{5} \end{vmatrix}$$

$\Longleftarrow$ הפתרון פותר

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5x^3} & \frac{1}{5x^2} \\ \frac{3}{5}x^2 & -\frac{x^3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \cdot \log x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5x}\log x \\ -\frac{x^4}{5}\log x \end{pmatrix}$$

$$c_1(x) = \int \frac{1}{5x}\log x = \frac{1}{10}\log^2 x + c_1$$

$$c_2(x) = -\frac{1}{5}\left(\frac{x^5}{5}\log x - \frac{x^5}{25}\right) + c_2 = -\frac{x^5}{25}\log x + \frac{x^5}{125} + c_2$$

$$\Longrightarrow \ y(x) = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 =$$

$$= \left(\frac{1}{10}\log^2 x + c_1\right)x^3 + \left(-\frac{x^5}{5}\log x + \frac{x^5}{125} + c_2\right) \cdot \frac{1}{x^2} \ =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{10}x^3 \log^2 x - \frac{x^3}{25}\log x + \frac{x^3}{125}}_{\text{פתרון פרטי}} + c_2 \cdot \frac{1}{x^2} + c_1 x^3$$

מבוא לפונקציית גרין

$$\underbrace{y^{(n)} - a_{n-1}(x)y^{(n-1)} - a_{n-2}(x)y^{(n-2)} - \cdots - a_0(x)y}_{L_y} = b(x)$$

$$L: C^n \to C^0$$

עכשיו מחפשים פתרונות למשוואה $Ly = b$

$b(x)$ פונקציה רציפה נתונה. הגרעין של L הוא n מימדי (מרחב הפתרונות ההומוגניים).

נסתכל על המרחב:

$$\{f \in C^n : f(x) = 0, f'(x) = 0, \cdots, f^{(n-1)}(x) = 0\} \subseteq C^n$$

$$L_y = y''(x) - a_1(x)y' - a_0(x)y$$

ורוצים למצוא אופרטור $M = L^{-1}$ על המרחב V. אם y_1, y_2 שני פתרונות בלתי תלויים לינארית למשוואה ההומוגנית הקשורה, כלומר

$$w(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

לכן $c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ פותר משוואה אי הומוגנית אם

$$w(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

כלל קרמר :

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2\\ b(x) & y_2'\end{vmatrix}}{\det\big(w(x)\big)}=-\frac{y_2(x)b(x)}{\det\big(w(x)\big)}$$

$$c_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}y_1 & 0\\ y_1' & b(x)\end{vmatrix}}{\det\big(w(x)\big)}=\frac{y_1(x)b(x)}{\det\big(w(x)\big)}$$

הפתרון הכללי של המשוואה הוא :

$$\begin{aligned}
&y(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)=\\
&=\int_{x_0}^{x}-\frac{y_2(t)b(t)dt}{[y_1y_2'-y_2y_1'](t)}\cdot y_1(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)b(t)dt}{[y_1y_2'-y_2y_1'](t)}\cdot y_2(x)=\\
&=\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)y_2(x)-y_1(x)y_2(t)}{[y_1y_2'-y_2y_1'](t)}b(t)dt=\int_{x_0}^{x}G(x,t)b(t)dt
\end{aligned}$$