

סמסטר ב', מועד א', תשס"ג
תאריך הבחינה: 20.6.2003
מספר קורס: 1101 – 0366

בחינה בחדו"א 1

מרצה: פאול בירן
מתרגל: ניר לב

משך הבחינה: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון בלבד.

יש לפתור שאלה אחת מחלק א' ושלוש שאלות מחלק ב'.
אין לענות על יותר שאלות מהנדרש.
בהצלחה!

חלק א'
יש לענות על שאלה אחת בלבד מבין שתי השאלות הבאות.

1. (25 נק') יש להוכיח את המשפט הבא:
תהי $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בקטע הפתוח (a, b) . נניח כי f מקבלת
מקסימום בנקודה $x_0 \in (a, b)$ אזי $f'(x_0) = 0$.

2. (25 נק') יש להוכיח את המשפט הבא (של Weierstrass):
תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בקטע (סגור וסופי) $[a, b]$. אזי f מקבלת
מקסימום ומינימום בקטע $[a, b]$.
(מותר להשתמש ללא הוכחה במשפט *Weierstrass* בדבר חסימות של פונקציה רציפה
בקטע סגור וסופי).

חלק ב'

יש לענות על שלוש שאלות בלבד מבין ארבע השאלות הבאות (אין להפריד בין תת-שאלות).

3. (25 נק') נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln \left| 1 - \frac{1}{x^2} \right|$

יש לחקור את הפונקציה לפי הנקודות הבאות: תחום הגדרה, תחום רציפות, תחומי עליה וירידה, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול, אסימפטוטות. יש לשרטט גרף של $y = f(x)$.

4. (סה"כ 25 נק') יש לחשב את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{1/n}$ כאשר $a, b > 0$

(ב) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$

5. (סה"כ 25 נק')

(א) יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$. יש להוכיח כי למשוואה

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

(בנעלם x) קיים לפחות שורש אחד בקטע $(0, 1)$.

(ב) יש למצוא באמצעות פיתוח Taylor קירוב של $e^{1/3}$ כך שהשגיאה לא תעלה על $\frac{1}{1000}$.

6. (סה"כ 25 נק')

(א) יש להוכיח כי $1 + 2 \ln x \leq x^2$ לכל $x > 0$.

(ב) האם הפונקציה $f(x) = x^{3/2}$ רציפה במ"ש ב- $(0, \infty)$?