לינארית 2 תשפ"ד אביב מועד ב- פתרון

<u>שאלה1:</u> בהרצאה.

<u>שאלה 2:</u> נתבונן ב $\mathbb{R}^3$ עם המ"פ הבאה:

$$< \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} >:= \frac{1}{4}x_1x_2 + \frac{1}{4}y_1y_2 + z_1z_2$$

ונגדיר $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ על ידי $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3x+y \\ x+3y \\ 4z \end{pmatrix}$

סעיף א: האם T צל"ע? (ביחס למ"פ הנתונה).

פתרון:

ניזכר שעבור בסיס או"נ B מתקיים: T צל"ע אמ"מ $[T]_B^B$צל"ע. ניקח בסיס או"נ לפי המ"פ הנתונה:

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

זהו אכן בסיס או"נ (בידקו בכמה שורות..). הארה: שימו לב שהמ"פ הנתונה היא כמו הסטנדרטית רק שכפלנו בסקלר כל מונום ולכן הגיוני לקחת את הבסיס הסטנ' לפי המ"פ הסטנ' ולכפול את הווקטורים בסקלר כך שה "$\frac{1}{4}$" יתבטל במקומות שהוא מופיע. מי שלא חשב על כך יכל לקחת בסיס ולהפעיל עליו גראם שמידט.

כעת,

$$[T]_B^B = \left(\left[T\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_B \left[T\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_B \left[T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_B \right) = \left(\left[\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_B \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_B \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_B \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

נשים לב שאכן $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^*$ כלומר צל"ע ולכן גם T צל"ע.

סעיף ב: מצאו את צורת הז'ורדן של T.

פתרון:

לפי סעיף א' T צל"ע ולכן לכסינה אוניטרית. כיוון שאלכסונית היא בצורת ז'ורדן וצורת הז'ורדן היא יחידה אזי זו צורת הז'ורדן של T. בצורה האלכסונית מופיעים הע"ע ולכן עלינו סה"כ למצוא את הע"ע של T וזאת ניתן לעשות לפי כל מטריצה מייצדת מבסיס לעצמו בפרט לפי זו שכבר שמצאנו:

$$\left| \lambda I - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \end{pmatrix} \right| = (\lambda-4) \left| \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \right|$$

$$= (\lambda-4)[(\lambda-3)^2 - 1] = (\lambda-4)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = (\lambda-4)(\lambda-4)(\lambda-2)$$

ולכן צורת הזורדן היא $J_1(4) \oplus J(4) \oplus J_1(2)$

סעיף ג: מצאו את הוקטורים העצמיים של T ביחס לכל אחד מהע"ע.

פתרון:

ראינו בהרצאה (ובתרגול) ש v הוא ו"ע של T אמ"מ $[v]_B$ו"ע של $[T]_B^B$. אם כן נמצא תחילה את הו"ע של $[T]_B^B$:

עבור $\lambda = 4$:

$$\left(\begin{array}{cccc} 4-3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4-3 & 0 & \mid\ 0 \\ 0 & 0 & 4-4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+R_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mid\ 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} z=t \\ y=s \\ x=s \end{array} \Longrightarrow sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

- נחפש v כך ש $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $v = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- נחפש v כך ש $[v]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $v = 0\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

עבור $\lambda = 2$:

$$\left(\begin{array}{cccc} 2-3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-3 & 0 & \mid\ 0 \\ 0 & 0 & 2-4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}R_3]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{cccc} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mid\ 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} z=0 \\ y=t \\ x=-t \end{array} \Longrightarrow sp\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

- נחפש v כך ש $[v]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $v = -1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

סה"כ המ"ע של T הם: $sp\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $sp\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

<u>שאלה 3:</u> יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ויהיו $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ הפורשים את $\mathbb{R}^n$. הוכיחו כי קיימת מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים ש v_i הוא ו"ע של A עבור ע"ע λ_i.

פתרון:

נגדיר את המטריצה $P := \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$. היא הפיכה כי עמודותיה בסיס ל $\mathbb{R}^n$(שהרי $v_1, \ldots, v_n$ פורשים את $\mathbb{R}^n$ולכן לפי השלישי חינם בת"ל ולכן בסיס). נגדיר את A:

$$A := P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

עבור A זו מתקיים $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$. כלומר היא דומה לאלכסונית ולכן הע"ע שלהאלכסונית הם הע"ע של A: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

בנוסף, אנו יודעים שעמודות המטריצה המלכסנת הם ו"ע של A כאשר בעמודה ה i ישנו ו"ע המתאים לע"ע במקום ה i באלכסון של האלכסונית. כלומר, אכן לכל $1 \le i \le n$ מתקיים ש v_i הוא ו"ע של A עבור ע"ע λ_i.

<u>שאלה 4</u>: הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:
יהי V ממ"פ נ"ס. ותהיינה $T, S : V \longrightarrow V$ הע"ל מתחלפות (כלומר, $TS = ST$)

1. **אם T, S אוניטריות אזי $T + S$ אוניטרית.**
פתרון: הפרכה, לדוגמה: ניקח $T = S = Id$. אכן הן אוניטריות כי (יש כמה הסברים נציג אחד) הן אכן שומרות נורמה שהרי לכל $v \in V$:

$$||T(v)|| = ||Id(v)|| = ||v||$$

ולכן לפי קריטריון אוניטריות הן אוניטריות (כנ"ל S). אבל $T + S$ איננה אוניטרית (גם כאן כמה אפשרויות לנימוק לדוג:) שהרי ניקח למשל ווקטור v עם נורמה 1 אזי

$$||(T + S)(v)|| = ||T(v) + S(v)|| = ||2v|| = 2||v|| = 2 \ne 1 = ||v||$$

ולכן לפי קריטריון אוניטריות $T + S$ לא אוניטרית.

2. **אם T, S נילפוטנטיות אזי $T + S$ נילפוטנטית. הוכחה:** T, S נילפוטנטיות ולכן קיימים $n, m \in \mathbb{N}$ כך ש $T^n = 0, S^m = 0$. נגדיר $k := max\{n, m\}$. מתקיים ש

$$(T + S)^{2k} \underset{\text{בינום}}{=} \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} T^i S^{2k-i} \underset{*}{=} 0$$

הסבר ל (*): אם $0 \le i \le k$ אזי $2k - i \ge k$ ולכן $S^{2k-i} = 0$. אם $k + 1 \le i \le 2k$ אזי $i \ge k$ ולכן $T^i = 0$. וקיבלנו שכל המונומים בסכום הם 0 ולכן גם הסכום שווה 0.

סעיף ב: תהי $A \in \mathbb{C}^{10\times9}$. אזי קיים למטריצה AA^t ע"ע 0 . פתרון: הוכחה.
תהי $A \in \mathbb{C}^{10\times9}$. אזי לפי לינארית 1: $rank(A) \le 9$ (שהרי זה מספר העמודות בת"ל) וכיוון ש כפל במטריצה יכול רק להוריד את הדרגה ($rank(AB) \le rank(A), rank(B)$) מקבלים ש $rank(AA^t) \le 9$. נשים לב ש $AA^t \in \mathbb{C}^{10\times10}$ וכפי שהראנו דרגתה לא 10 ולכן איננה הפיכה. והרי לא הפיכה אמ"מ יש ע"ע 0. ולכן ל AA^t קיים ע"ע 0.

<u>שאלה 5</u>: יהי Vממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{C}$ (נסמן את המ"פ $<,>$), ותהי $T : V \longrightarrow V$ הע"ל צל"ע כך שכל הע"ע שלה חיוביים (גדולים <u>ממש</u> מ 0)
סעיף א: הוכיחו כי קיימת הע"ל $R : V \longrightarrow V$ צל"ע כך ש $T = RR^*$.
פתרון: T צל"ע ולכן לכסין אוניטרית. כלומר קיים בסיס $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ל V כך ש $[T]_B^B$ אלכסונית. באלכסון שלה יש את הע"ע של T שנתון שהם חיוביים. כלומר, קיימים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ כך ש

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & & \\ & \sqrt{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix}^2$$

ומתקיים ש $\sqrt{\alpha_i}$ ממשי שהרי $\alpha_i > 0$. נגדיר הע"ל $R : V \longrightarrow V$ להיות ההע"ל המקיימת:

$$R(v_1) = \sqrt{\alpha_1}v_1$$
$$\vdots$$
$$R(v_n) = \sqrt{\alpha_n}v_n$$

אכן קיימת כזו יחידה לפי משפט ההגדרה. עבור R זו מתקיים

$$[R]_B^B = \left(\begin{bmatrix} R(v_1) \end{bmatrix}_B \cdots \begin{bmatrix} R(v_1) \end{bmatrix}_B \right) = \left(\begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_1} v_1 \end{bmatrix}_B \cdots \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_n} v_n \end{bmatrix}_B \right) = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & & \\ & \sqrt{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

השיוויון האחרון נכון כי (לכל $1 \le i \le n$) כאשר מציגים את $\sqrt{\alpha_i} v_i$ לפי הבסיס B זה $\sqrt{\alpha_i}$ כפול עצמו ו- 0 כפול האחרים. סה"כ מצאנו R כך ש

$$[T]_B^B = [R]_B^B [R]_B^B$$

לכן $[T]_B^B = [RR]_B^B$ ולכן $T = RR$. בנוסף R היא צל"ע שהיא המטריצה המייצגת שלה לפי בסיס או"נ (הבסיס B שלנו) היא צל"ע ולכן $R = R^*$. לכן סהכ מצאנו R צל"ע כך ש $T = RR = RR^*$.

סעיף ב: עבור T הנ"ל נתבונן במ"פ הנתונה $<,>$. ונגדיר את המכפלה הבאה: לכל $v,u \in \mathbb{R}^n$:

$$< v,u >' := < Tv, u >$$

הוכיחו כי זו מ"פ על V.

פתרון: נוכיח כי זו מ"פ על V. לפי סעיף א קיימת R צל"ע כך ש $T = RR^*$

אי-שליליות: יהי $v \in V$. תת

$$< v,v >' = < Tv, v > = < RR^*v, v > = < R^*v, R^*v > \ge 0$$

הא"ש האחרון נובע מכך שעל $<,>$ נתון שהיא מ"פ ולכן שם יש א"ש. בנוסף, נקבל

$$< v,v >' = 0 \underset{\text{חישוב לעיל}}{\Longleftrightarrow} < R^*v, R^*v > = 0 \underset{\text{נתון ש <,> היא מ"פ}}{\Longleftrightarrow} R^*v = 0$$

ולפי סעיף א מתקיים הע"ע של R (או R^*שהרי היא צל"ע) הם $\sqrt{\alpha_i}$ ($i = 1,\dots,n$) ולכן שונים מ 0 ולכן היא הפיכה ולכן $v = 0 \Longleftrightarrow R^*v = 0$ כדרוש.

הרמיטיות: יהיו $v,u \in V$

$$\overline{< v,u >'} = \overline{< Tv, u >} \underset{\text{נתון ש <,> היא מ"פ ולכן הרמיטית}}{=} < u, T(v) > = < T^*(u), v >$$

$$\underset{T=T^*}{=} < T(u), v > = < u, v >'$$

לינאריות ברכיב ראשון: יהיו $v,u,w \in V$ ויהי $\alpha \in \mathbb{C}$. =

$$< v+\alpha u, w >' = < T(v+\alpha u), w > \underset{\text{הע"ל T}}{=} < T(v) + \alpha T(u), w >$$

$$\underset{\text{נתון ש <,> היא מ"פ}}{=} < T(v), w > + \alpha < T(u), w > = < v,u >' + \alpha < u, w >'$$

סעיף ג: תהי T כנ"ל ותהי $S: V \longrightarrow V$ צל"ע. הוכיחו כי ST לכסינה.

פתרון: **(הערה: שימו לב שהרכבה של העתקות צל"ע איננה בהכרח צל"ע).**

נשים לב שבמ"פ הנתונה:

$$< (ST)v, u >' = < T(S(T(v))), u > = < S(T(v)), T^*(u) > = < T(v), S^*(T^*(u)) >$$

$$\underset{T^*,S^* \text{צל"ע}}{=} < T(v), S(T(u)) > = < v, (ST)v >'$$

ולכן לי הגדרת צמודה נקבל שבמ"פ החדשה $(ST)^* = ST$. כלומר, צל"ע ולכן לכסינה אוניטרית לפי המ"פ החדשה ובפרט לכסינה. (לכיסנה כלל לא תלוי במ"פ).