חשבון אינפי 1

תרגיל 2-פתרון

1. לכל אחת מהקבוצות הבאות מצאו חסם עליון, חסם תחתון, מקסימום, מינימום (אם קיימים). נמקו את התשובות

א. $A_1=\left\{5+\frac{2}{3n}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf A_1=5 \quad \sup A_1=\max A_1=\frac{17}{3}$ לקבוצה A_1 אין מינימום

ב. $A_2=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\left(x^3-1\right)\left(x^2-16\right)=0\right\}$

$\inf A_2=\min A_2=-4$, $\sup A_2=\max A_2=4$, כי A_2 קבוצה סופית ולכן יש לה איבר מינימלי ומקסימלי

ג. $A_3=\left\{(-1)^n\left(8-\frac{5}{3^n}\right)\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf A_3=-8$, $\sup A_3=8$ אינפימום וסופרימום לא שייכים לקבוצה לכן אין ל- A_3 מינימיום ומקסימום.

ד. $A_4=\left\{\frac{2n}{n^2+1}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf A_4=0\notin A_4$ ולכן אין לקבוצה מינימום. $\sup A_4=\max A_4=1$.

ה. $A_5=\left\{n+\frac{1}{m}\middle| n,m\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf A_5=1\notin A_5$ ולכן אין להבוצה מינימום, A_5 לא חסומה מלעיל ולכן $\sup A_5=\infty$ ואין לה מקסימום.

ו. $A_6=\left\{\sum_{i=1}^{n}7\cdot 10^{-i}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf A_6=\min A_6=0.7$, $\sup A_6=0.\overline{7}=\frac{7}{9}\notin A_6$. כל אברי הקבוצה הם שברים עשרוניים סופיים ולכן $0.\overline{7}\notin A_6$ ולכן אין לקבוצה מקסימום.

ז. $A_7=\left\{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{3}\right)^n\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf A_7=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}=\min A_7$, $\sup A_7=\frac{1}{4}\notin A_7$ ולכן אין לקבוצה מקסימום.

ח. $A_8=\left\{\inf\left\{-\frac{1}{m}+\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}\middle| m\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf\left\{-\frac{1}{m}+\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}=\inf\left\{-\frac{1}{m}+\frac{1}{n!}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}=-\frac{1}{m}$ ולכן $A_8=\left\{-\frac{1}{m}\middle| m\in\mathbb{N}\right\}$

ומכאן $\inf A_8=-1=\min A_8$, $\sup A_8=0\notin A_8$ ואין לקבוצה מקסימום.

2. נתון $S\subseteq T$ מה היחס בין $\sup S,\sup T,\inf S,\inf T$ $\left(\le,\ge,<,>,=,\neq\right)$

תשובה: $\inf T\le\inf S\le\sup S\le\sup T$

3. הוכיחו או הפריכו:

א. אם קיים מקסימום לקבוצה, אז הוא יחיד

תשובה: הטענה נכונה.

הוכחה: תהי A קבוצה. ונניח בשלילה שקיימים $a \neq b$ כך ש- $\max A = a$ ו- $\max A = b$. לפי הגדרת המקסימום לכל $x \in A$ מתקיים $x \le a$ וגם $a \in A$ וכן $x \le b$ ו- $b \in A$ ולכן $b \le a$ וגם $a \le b$ ומכאן $a = b$ סתירה להנחה.

ב. אם לקבוצה S יש מינימום, אז לכל $c > 0$ ממשי לקבוצה $cS = \{cs \mid s \in S\}$ יש מינימום והוא $c \cdot \min S$.

תשובה: הטענה נכונה.

יהי $x \in S$ כך ש- $s = \min S$. לפי הגדרת המינימום לכל $x \in S$ מתקיים $x \ge s$, לפי הנתון $c > 0$ ולכן לכל $x \in S$ מתקיים $cx \ge cs$ ולכן $\min cS = c \cdot s = c \cdot \min S$ כדרוש.

ג. תהיינה S ו-T קבוצות חסומות ולא ריקות, אזי $\sup(S \cup T) = \max\{\sup S, \sup T\}$.

תשובה: הטענה נכונה.

הוכחה: לכל $x \in S \cup T$ מתקיים $x \in S$ או $x \in T$,

אם $x \in S$ אז $x \le \sup S$,

אם $x \in T$ אז $x \le \sup T$,

$\sup S \le \max\{\sup S, \sup T\}$ וגם $\sup T \le \max\{\sup S, \sup T\}$ ולכן לכל $x \in S \cup T$ מתקיים $x \le \max\{\sup S, \sup T\}$.

$\Leftarrow \max\{\sup S, \sup T\}$ הוא חסם מלעיל. כדי להוכיח שהוא חסם מלעל הקטן ביותר, נניח בה"כ ש- $\max\{\sup S, \sup T\} = \sup S$ ונניח בשלילה שקיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $x \in S \cup T$ $x < \sup S - \varepsilon$.

היות ו- $x \in S \subseteq S \cup T$ נקבל שקיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $x \in S$ מתקיים $x < \sup S - \varepsilon$. וזאת סתירה להגדרת סופרימום.

ד. תהיינה S ו-T קבוצות חסומות ולא ריקות, אזי $\inf(S \cap T) = \min\{\inf S, \inf T\}$.

תשובה: הטענה לא נכונה.

דוגמא נגדית:

$$S = \{-1, 1, 2\}$$
$$T = \{1, 2\}$$
$$S \cap T = \{1, 2\}$$
$$\inf S = -1$$
$$\inf T = 1$$
$$\inf\{S \cap T\} = 1 \neq \min\{-1, 1\}$$

ה. תהי S קבוצה חסומה ולא ריקה ונניח ש- $0 \notin S$. נגדיר $T := \left\{\frac{1}{s} \middle| s \in S\right\}$., אזי $\inf T = \frac{1}{\sup S}$.

תשובה: הטענה לא נכונה.

דוגמא נגדית:

$$S=\{-2,3,4\}$$
$$\Rightarrow T=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right\}$$
$$\inf T=-\frac{1}{2}\neq\frac{1}{\sup S}=\frac{1}{4}$$

ו. תהיינה S ו-T קבוצות חסומות ולא ריקות של ממשיים, אזי $\inf\left(\{s\cdot t\,|\,s\in S,t\in T\}\right)=\inf S\cdot\inf T$

תשובה: הטענה לא נכונה.
דוגמא נגדית:

$$S=\{-1,-2,-3\}$$
$$T=\{1,2,3\}$$
$$\inf\left(\{s\cdot t\,|\,s\in S,t\in T\}\right)=-3\cdot3=\inf S\cdot\sup T$$

ז. תהיינה S ו-T קבוצות חסומות ולא ריקות של ממשיים, אז' $\sup\left(\{s\cdot t\,|\,s\in S,t\in T\}\right)=\sup S\cdot\sup T$

תשובה: הטענה לא נכונה.
דוגמא נגדית:

$$S=\{-1,-2,-3\}$$
$$T=\{1,2,3\}$$
$$\sup\left(\{s\cdot t\,|\,s\in S,t\in T\}\right)=-1\cdot1=\sup S\cdot\inf T$$

4. תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$ קבוצות חסומות ולא ריקות. מצאו $\inf$ ו- $\sup$ של הקבוצות הבאות:

א. $A-B=\{a-b\,|\,a\in A,b\in B\}$

תשובה:

$$\sup(A-B)=\sup A-\inf B$$
$$\inf(A-B)=\inf A-\sup B$$

נוכיח ש- $\sup(A-B)=\sup A-\inf B$.

לכל $a\in A$ מתקיים $a\leq\sup A$ וכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $a_1\in A$ כך ש- $a_1\geq\sup A-\frac{\varepsilon}{2}$

לכל $b\in B$ מתקיים $-b\leq-\inf B$ וכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $b_1\in B$ כך ש- $b_1\leq\inf B+\frac{\varepsilon}{2}$ ולכן

$$-b_1\geq-\inf B-\frac{\varepsilon}{2}$$

מכאן לכל $x\in A-B$ מתקיים $x=a-b\leq\sup A-\inf B$ וכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $x\in A-B$ כך ש- $x=a_1-b_1\geq\sup A-\inf B-\varepsilon$.

באופן דומה מוכיחים ש- $\inf(A-B)=\inf A-\sup B$

ב. $A+B=\left\{a+b \middle| a\in A, b\in B\right\}$

תשובה :

$$\sup\left(A+B\right)=\sup A+\sup B$$
$$\inf\left(A+B\right)=\inf A+\inf B$$

הוכחה דומה לסעיף א'.