

חשבון אינפי 1

תרגיל 10

לא להגשה

1. גזרו את הפונקציות הבאות

$$\cdot \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \quad \text{א.}$$

$$\cdot e^{\sqrt{\ln x}} \quad \text{ב.}$$

$$\cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \quad \text{ג.}$$

$$\cdot \sqrt{2^{\frac{1}{x}}} \quad \text{ד.}$$

$$\cdot |x| \sin x \quad \text{ה.}$$

$$\cdot (\sqrt{2x+1})^{\ln(\frac{1}{x})} \quad \text{ו.}$$

2. תהי

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{ax} & , x \neq 0 \\ b & , x = 0 \end{cases}$$

מצא את הקבועים a ו- b אם נתון $f'(0) = 2$.

.3

(1) תהי f גזירה ב- \mathbb{R} ולכל x, y מתקיים: $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$.
הוכח ש- f גזירה פעמיים ב- \mathbb{R} ומתקיים $f''(x) = 2$.

(2) תהי $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-100)$. הוכח כי למשוואה $f'(x) = 0$ יש בדיוק 100 פתרונות. באיזה קטע נמצא כל אחד מהם?

(3) הוכח או הפרך:

תון כי $f'(x_0) = 0$ וכן $f(x)$ רציפה וגזירה בקטע $[a, b]$, אזי קיימות נקודות $x_1, x_2 \in [a, b]$ כך ש-

$$f(x_1) = f(x_2)$$

(4) תהי $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$. הוכח שקיימת נקודה $0 < c < 8$ המקיימת $f'(c) = 0$ ומצא אותה.

(5) תהי f רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) פרט למס' סופי של נקודות.

הוכח שקיימת נקי $c \in (a, b)$ כך ש-

$$|f(b) - f(a)| \leq |f'(c)| |b - a|$$

(6) הוכח שלכל $0 < a < b$ מתקיים $\frac{b-a}{1+b} < \ln \frac{1+b}{1+a} < \frac{b-a}{1+a}$. (תזכורת: $\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$).

בהצלחה במבחנים!!!