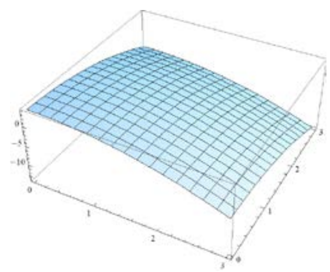
אינפי 4 – תרגול 6

ניתן להגדיר משטח דו ממדי ב $\mathbb{R}^3$ ב 3 דרכים:

1. <u>הצגה פרמטרית:</u>

נוכל לרשום $x = f(u,v), y = g(u,v), z = h(u,v)$.

דוגמא: התבוננו בחלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$ שבתומן הראשון



נוכל לקבל הצגה פרמטרית של המשטח הזה, אם נציג $x = u$ ו $y = v$. בחירה זו תגרור $z = 4 - u^2 - v^2$. ההצגה הפרמטרית המתאימה של הפרבולואיד היא, אם כן,

$$x = u, y = v, z = 4 - u^2 - v^2$$

או בצורה וקטורית $r(u,v) = ui + vj + (4 - u^2 - v^2)k$. כאשר u ו v מקיימים $u^2 + v^2 \le 4, u \ge 0, v \ge 0$.

ניתן לקבל הצגה פרמטרית שונה של המשטח שבדוגמא הקודמת אם רושמים את משוואתו בקואורדינטות גליליות (r,θ,z) . כדי להמיר את $z = 4 - x^2 - y^2$ לקורורדינטות גליליות, נציב $y = r\sin\theta, x = r\cos\theta$, מכאן נקבל $z = 4 - (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 = 4 - r^2$. למשטח יש אפוא הצגה פרמטרית, באמצעות הפרמטרים r ו θ כזו

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = 4 - r^2$$

או בצורה וקטורית $r(\mathrm{r},\theta) = r\cos\theta i + r\sin\theta j + (4 - r^2)k$. כאשר r,θ מקיימים $0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

2. <u>משוואות:</u>

כאן, משטחים ממימד m אינם מיוצגים באופן ישיר אלא דרך משוואות בצורה

$$\begin{aligned}&\phi_1(x_1,x_2,...,x_n)=c_1\\&\vdots\\&\phi_m(x_1,x_2,...,x_n)=c_m\end{aligned}$$

דוגמא: נסתכל על

$$\begin{aligned}&x^2+y^2=1\\&y+z=0\end{aligned}$$

הפתרון של שתי המשוואות הינו גליל ברדיוס 1 סביב ציר ה z הנחתך ע"י מישור החותך את ציר ה x ב 45 מעלות. מכאן שנקבל אליפסה, משטח חד ממדי ב $\mathbb{R}^3$.

משפט: תהי נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{aligned}&\phi_1(x_1,x_2,...,x_n)=c_1\\&\vdots\\&\phi_m(x_1,x_2,...,x_n)=c_m\end{aligned}$$

נסמן ב M את קבוצת הנקודות המקיימות משוואות אלו. אם לכל וקטור $x\in M$ מתקיים

$$\begin{pmatrix}\nabla\phi_1(\mathbf{x})\\\vdots\\\nabla\phi_m(\mathbf{x})\end{pmatrix}$$

הינה מטריצה ממימד m $(m>0)$ אזי M הינה יריעה ממימד $n-m$.

דוגמא: נסתכל על

$$\begin{aligned}&\phi_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0\\&\phi_2(x,y,z)=x+y+z-1=0\end{aligned}$$

כאן,

$$\begin{aligned}&\nabla\phi_1=(2x,2y,2z)\\&\nabla\phi_2=(1,1,1)\end{aligned}$$

האם קיימת נקודה כך ש $rank\begin{pmatrix}2x&2y&2z\\1&1&1\end{pmatrix}<2$? לא ייתכן כי ה $rank$ הינו 0 שכן יש לנו את השורה $\begin{pmatrix}1&\dots&1\end{pmatrix}$. אבל יכול להיות שווקטורים תלויים לינארית. זה יקרה אם $x=y=z$, האם יש נקודה כזאת ב M ? נבדוק את המשוואות המגדירות את M. נקבל כי $3x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, אך אז נקבל סתירה מהמשוואה השנייה. מכאן שיש לנו דרגה מלאה ולכן M יריעה מדרגה 1.

דוגמא: נסתכל על $\phi_1(x,y)=x\cdot y=1$. האם זו יריעה?

נגזור ונקבל $\nabla\phi_1(x,y)=(y,x)$. במקרה הנ"ל קל לראות כי $\nabla\phi_1(x,y)\neq 0$ ולכן מדובר ביריעה ממד אחד. את הפרמטריזציה של היריעה הנ"ל ניתן לכתוב ע"י שתי מפות:

$t\mapsto\left(t,\frac{1}{t}\right)$ ו $t\mapsto\left(-t,-\frac{1}{t}\right)$.

דוגמא: נסתכל על $\phi_1(x,y)=x\cdot y=0$. האם זו יריעה?

נגזור ונקבל $\nabla\phi_1(x,y)=(y,x)$. עבור $x=y=0$ נקבל כי $\nabla\phi_1(0,0)=0$ ולכן לא נוכל לקבוע כי זאת יריעה. (למעשה, זו איננה יריעה)

3. <u>גרף של פונקציה:</u>

אם יש לנו פונקציה גזירה ברציפות $f(x,y)$, נוכל להגדיר יריעה ב $\mathbb{R}^3$ ע"י $M=(x,y,f(x,y))$.

דוגמא: הפונקציה $f(x)=\sin x$ יכולה בקלות להפוך ליריעה ע"י $M=(x,\sin x)$.