מערך תרגול 6 / אינפי 1 למדמ"ח

12 בדצמבר 2016

1 גזירה של פונקציות סתומות

1. בתרגילים הבאים יש למצוא את $\frac{dy}{dx}$. התוצאה יכולה לכלול את x, y.

א. $y = e^{x+2y}$.

שלב ראשון: $\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^{x+2y})}{dx}$. ומכאן נמשיך ע"י גזירת הצד הימני של המשוואה:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^{x+2y})}{dx} = e^{x+2y} \cdot \frac{d(x+2y)}{dx} = e^{x+2y} \cdot (\frac{dx}{dx} + \frac{d(2y)}{dx}) = e^{x+2y}(1 + 2\frac{dy}{dx})$$

כעת מהשיוויון נקבל

$$\frac{dy}{dx}(1 - 2e^{x+2y}) = e^{x+2y}$$

ולכן בסה"כ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+2y}}{1 - 2e^{x+2y}}$$

ב. $\sqrt{y} + \sqrt{x} = x + y$.

שלב ראשון: $\frac{d(x+y)}{dx} = \frac{d(\sqrt{y}+\sqrt{x})}{dx}$. כעת נפתח את שני הצדדים:

צד שמאל:

$$\frac{d(\sqrt{y} + \sqrt{x})}{dx} = \frac{d(\sqrt{y})}{dx} + \frac{d(\sqrt{x})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx}$$

צד ימין:

$$\frac{d(x+y)}{dx} = \frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

ולכן נקבל בסה"כ

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \iff \frac{dy}{dx}(1 - \frac{1}{2\sqrt{y}}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 \iff \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1}{1 - \frac{1}{2\sqrt{y}}}$$

2. מצא את שיפוע הפונקציה $\tan y = x^2$ בנקודה $(1, \frac{\pi}{4})$.
שוב נשתמש בגזירת פונקציה סתומה:

$$\frac{d(\tan y)}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx}$$

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \cos^2 y$$

כעת נציב את הנקודה הנתונה ונקבל את השיפוע:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 1 \cdot \cos^2(\frac{\pi}{4}) = 2 \cdot (\sqrt{\frac{1}{2}})^2 = 1$$

2 גבולות

הגדרה: הגבול של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0 הוא $L \in \mathbb{R}$ אם לכל $x \approx x_0$ מתקיים: $f(x) \approx L$.

סימון: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

דוגמא: בפונקציה $f(x) = x$ הגבול בנקודה x_0 הוא x_0, כי לכל $x \approx x_0$ מתקיים: $f(x) = x \approx x_0$.

כיצד נחשב את הגבול ב־x_0? נתבונן ב־ $st(f(x_0 + \triangle x))$, עבור $\triangle x \neq 0$ אינפיניטסימלי. אם החלק הסטנדרטי קיים (כלומר, הביטוי סופי) ולא תלוי בבחירת $\triangle x$ אז $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = st(f(x_0 + \triangle x))$.

2.1 דוגמאות לפונקציות שאין להן גבול בנקודה מסויימת

1. לפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ אין גבול ב־1: $st(f(1 + \triangle x)) = st(\frac{1}{1 + 2\triangle x + 2\triangle x^2 - 1})$, אך זה לא מוגדר.
2. לפונקציה $f(x) = \sqrt{-x}$ אין גבול ב־0: $st(f(0 + \triangle x)) = st(\sqrt{-\triangle x})$ לא מוגדר עבור $\triangle x > 0$.
3. לפונקציה $f(x) = \frac{3x - 15}{|3x - 15|}$ אין גבול ב־5: $st(f(5 + \triangle x)) = st(\frac{3\triangle x}{|3\triangle x|}) = 1$ עבור $\triangle x > 0$, ומאידך $st(f(5 + \triangle x)) = st(\frac{3\triangle x}{|3\triangle x|}) = -1$ עבור $\triangle x < 0$. לכן הביטוי תלוי בבחירת $\triangle x$ והגבול לא קיים.

2.2 תרגילי חישוב גבול

1. חשב $\lim_{x\to 0}\frac{t^3-2t^2+4}{3t^2-5t+7}$.
נחשב לפי ההגדרה:

$$\lim_{x\to 0}\frac{t^3-2t^2+4}{3t^2-5t+7}=st(\frac{(\triangle x)^3-2(\triangle x)^2+4}{3(\triangle x)^2-5\triangle x+7})\overset{st(\triangle x)=0}{=}st(\frac{4}{7})=\frac{4}{7}$$

2. חשב $\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{2}{x}}{3-\frac{4}{x}}$.
נחשב:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{2}{x}}{3-\frac{4}{x}}=st(\frac{1+\frac{2}{\triangle x}}{3-\frac{4}{\triangle x}})=st(\frac{\triangle x+2}{3\triangle x-4})=\frac{st(\triangle x+2)}{st(3\triangle x-4)}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$$

3. חשב $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$.
נחשב:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=st(\frac{(a+\triangle x)^2-a^2}{a+\triangle x-a})=st(\frac{(a+\triangle x-a)(a+\triangle x+a)}{a+\triangle x-a})=st(a+\triangle x+a)=2a$$

2.3 שאלות כלליות

1. הוכח או הפרך: $\lim_{x\to x_0}f(x_0)=L\Rightarrow f(x_0)=L$.
הפרכה: ניקח $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$. לפי שאלה קודמת $\lim_{x\to 1}f(x)=2$, אבל הפונקציה בכלל לא מוגדרת בנקודה $x=1$.

2. הוכח או הפרך: נניח $\lim_{x\to x_0}f(x_0)=L$ וגם $f(x_0)$ מוגדר, אזי $f(x_0)=L$.
הפרכה: ניקח $f(x)=\begin{cases}1 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$, אזי מתקיים:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=st(f(\triangle x))=st(1)=1\neq 0=f(0)$$

3. א. הוכח: $\lim_{x\to x_0}f(x)=L\Rightarrow\lim_{x\to x_0}|f(x)|=|L|$.
נחשב את הגבול:

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=st(|f(x_0+\triangle x)|)=|st(f(x_0+\triangle x))|=|\lim_{x\to x_0}f(x)|=|L|$$

ב. האם הכיוון ההפוך גם נכון? לא! ניקח $f(x)=x$ ואז אמנם מתקיים $\lim_{x\to -1}|f(x)|=|-1|=|1|$ אבל $\lim_{x\to -1}f(x)=-1\neq 1$.

2.4 אריתמטיקה של גבולות

הכללים הבאים נובעים ישירות מכללי החלק הסטנדרטי:

1. $\lim_{x\to x_0} k\cdot f(x) = k\cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$.
2. $\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$.
3. $\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$.
4. אם $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ אז $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$. דוגמא לחשיבות התנאי: לפונקציה $\frac{1}{x}$ אין גבול ב־0.
5. אם $\lim_{x\to x_0} g(x) > 0$ אז $\lim_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to x_0} f(x)}$. דוגמא לחשיבות התנאי: לפונקציה $\sqrt{x}$ אין גבול ב־0.

כמה שאלות בנושא:

1. נניח שקיים הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$, אך הגבול של $g(x)$ ב־x_0 לא קיים. מה ניתן לומר על $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$?
יכול להיות שהגבול קיים, לדוגמא: $f(x)=x, g(x)=\frac{1}{x}$ בנקודה $x_0=0$, ונקבל $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$.
2. ונניח שגם הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$ לא קיים, מה ניתן כעת לומר על $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$?
הגבול יכול להיות קיים, לדוגמא אם ניקח $f(x)=g(x)=\sqrt{x}$ בנקודה $x_0=0$.
והוא גם יכול להיות לא קיים, לדוגמא אם ניקח $f(x)=g(x)=\frac{1}{x}$ בנקודה $x_0=0$.
3. הוכח שאם הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים ושונה מאפס, והגבול $\lim_{x\to x_0} g(x)$ לא קיים, אז הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ לא קיים.
הוכחה: נניח בשלילה שהגבול קיים, אז כיוון ש־ $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים ושונה מאפס נובע מחוק החילוק של אריתמטיקה שהגבול $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)}{f(x)}$ קיים. אבל $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)}{f(x)}$ בסתירה.

2.5 גבולות חד צדדיים

הגדרה: נאמר שלפונקציה $f(x)$ יש גבול ימני ב־x_0, אם $st(f(x_0+\triangle x))$ עבור $\triangle x > 0$ קיים, ונסמן: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = st(f(x_0+\triangle x))$.

נאמר שלפונקציה $f(x)$ יש גבול שמאלי ב־x_0, אם $st(f(x_0+\triangle x))$ עבור $\triangle x < 0$ קיים, ונסמן: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = st(f(x_0+\triangle x))$.

כמובן שייתכן שרק אחד הגבולות החד צדדיים קיים והשני לא או שהם שונים.

דוגמא: נתבונן בפונקציה $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ ונחשב את הגבולות החד צדדיים ב־0:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \overset{\triangle x>0}{=} st(e^{\frac{1}{\triangle x}}) = st(e^H)$$

כאשר H אינסופי חיובי, אך זה לא מוגדר. מאידך:

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \overset{\triangle x<0}{=} st(e^{\frac{1}{\triangle x}}) = st(e^{-H}) = st(\frac{1}{e^H}) = 0$$

דוגמא נוספת: $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$. נחשב גבולות חד צדדיים ב־0:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=st(1)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=st(0)=0$$

הערה: אם שני הגבולות החד צדדיים ב־x_0 קיימים ושווים ל־L, אז לפונקציה יש גבול ב־x_0 והוא שווה ל־L.

תרגיל: חשב $\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x-3}-1}{x-4}$.

פיתרון:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x-3}-1}{x-4}\overset{\triangle x>0}{=}st(\frac{\sqrt{3+\triangle x-3}-1}{3+\triangle x-4})=st(\frac{\sqrt{\triangle x}-1}{\triangle x-1})=\frac{st(\sqrt{\triangle x}-1)}{st(\triangle x-1)}=\frac{-1}{-1}=1$$

שימו לב ש־$\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{x-3}-1}{x-4}$ לא קיים.