

אלגברה לינארית 1 (88112), סמסטר קיץ תשפ"ה, מועד א' - פתרון

28.8.2025, ד' באלול התשפ"ה

מרצים: עוזי חרוש, אריאל ויצמן, דניס גולקן, ארז שיינר.
מתרגלים: יחזקאל אימרה רגב, בוריס גוליקוב, שירה ידעי, נמרוד נדבורני, עידו פלדמן, איתן פרימן, אביתר ישראל שויקה.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטייטה לא תבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

1. נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

(א) (10 נקודות) מצאו בסיסים לתתי-המרחבים הבאים של $\mathbb{R}^3$:

i. $N(A) + C(A)$

ii. $N(A) \cap C(A)$

פתרון:

נתחיל לדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$N(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$C(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ניזכר שמתקיים:

$$\text{span} A + \text{span} B = \text{span} (A \cup B)$$

ואצלנו:

$$N(A) + C(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

וצריך לבדוק אם זה בסיס, כלומר אם זה בתל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שיש חופשי בעמודה השלישית ולכן שני הראשונים בסיס לסכום:

$$N(A) + C(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = C(A)$$

זאת אומרת:

$$N(A) \subseteq C(A)$$

ולכן

$$N(A) \cap C(A) = N(A)$$

(ב) (8 נקודות) האם A הפיכה? אם כן מצאו את ההופכית A^{-1} , אם לא מצאו $B \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$ כך ש $AB = 0$.

פתרון:

קיבלנו

$$N(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן עבור

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

נקבל

$$\forall 1 \leq i \leq 5 : C_i(AB) = A \cdot C_i(B) = A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

ולכן $AB = 0$.

(ג) (8 נקודות) תהא $B \in \mathbb{R}^{3 \times k}$ כך ש $AB = 0$. מה האפשרויות ל $\text{rank}(B)$?

פתרון:

נשים לב שכאשר $AB = 0$ נקבל

$$C(B) \subseteq N(A)$$

הוכחה: לכל i מתקיים

$$A \cdot C_i(B) = C_i(AB) = 0$$

ולכן

$$C_i(B) \in N(A)$$

ולכן

$$C(B) = \text{span} \{C_1(B), \dots, C_k(B)\} \subseteq N(A)$$

מכיוון ש

$$\dim N(A) = \dim \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = 1$$

נקבל:

$$\text{rank}(B) = \dim C(B) \leq \dim N(A) = 1$$

ולכן

$$\text{rank}(B) \in \{0, 1\}$$

2. (8 נקודות כל סעיף) תהא $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית התלויה בפרמטר a :

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + ay + z \\ ax + y + az \\ x + y + az \end{pmatrix}$$

(א) עבור אילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ ההעתקה T הפיכה?

פתרון:

אם ניקח את הבסיס הסטנדרטי

$$E = \{e_1, e_2, e_3\}$$

נקבל

$$[T]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

וכמובן T הפיכה אם ורק אם המייצגת הפיכה. נתחיל לדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - aR_1} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 - a^2 & 0 \\ 0 & 1 - a & a - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - (1+a)R_3} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 - a^2 \\ 0 & 1 - a & a - 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 - a & a - 1 \\ 0 & 0 & (a - 1)(a + 1) \end{pmatrix}$$

לכן: עבור $a \neq \pm 1$ המטריצה הפיכה.

(ב) לכל ערך של a עבורו T לא הפיכה בדקו האם $\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \in \text{Im}(T)$? במקרה שכן, האם ישנם $u \neq v$ ב- $\mathbb{R}^3$ כך ש

$$Tv = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = Tu$$

פתרון:

במילים של מטריצות השאלה היא האם למערכת $Ax = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$ יש פתרון והאם יש יותר מאחד. נדרג את b המבוקש בהתאם לתהליך שדירגנו את A :

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - aR_1} \begin{pmatrix} a \\ a - a^2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - (1+a)R_3} \begin{pmatrix} a \\ a - a^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a - a^2 \end{pmatrix}$$

ולכן למערכת שלנו יש פתרון אם ורק אם למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+1) & a-a^2 \end{array} \right)$$

כעת, עבור $a = 1$ נקבל שאין שורת סתירה ויש שני חופשיים ולכן יש אינסוף פתרונות. עבור $a = -1$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

השורה השלישית היא סתירה ולכן למערכת אין פתרון.

(ג) עבור $a = 1$ הוכיחו או הפריכו: קיים בסיס סדור B כך שבמטריצה המייצגת $[T]_B^B$ יש שתי עמודות אפסים ושתי שורות אפסים.

פתרון:

תוצאת הדירוג במקרה זה היא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\ker T = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Im} T = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ניקח

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ונקבל

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שהרי שתי העמודות האחרונות מחושבות על ידי וקטורים מהגרעין, והעמודה הראשונה:

$$C_1([T]_B^B) = \left[T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_B = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. (8 נקודות כל סעיף) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. לכל שתי קבוצות סופיות $A, B \subseteq V$ מתקיים: אם $\text{span}(A) \cap \text{span}(B) \neq \{0\}$

אז $\text{span}(A) \cup \text{span}(B)$ הוא תת-מרחב של V .

פתרון:

הפרכה: ניקח $V = \mathbb{R}^3$ וניקח

$$A = \{e_1, e_3\}, B = \{e_2, e_3\}$$

ואז כמובן

$$\text{span}(A) \cap \text{span}(B) \subseteq \text{span}\{e_3\} \neq \{0\}$$

אבל מכיון ש $\text{span}(A) \not\subseteq \text{span}(B)$ וכן $\text{span}(B) \not\subseteq \text{span}(A)$ נקבל ממשפט שלמדנו ש $\text{span}(A) \cup \text{span}(B)$ איננו תת-מרחב.

(ב) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. לכל שתי קבוצות סופיות $A, B \subseteq V$ מתקיים: אם $\text{span}(A) \cap \text{span}(B) \neq \{0\}$ וגם $A \cap B = \emptyset$ אז $A \cup B$ תלויה לינארית.

פתרון:

הוכחה: קיים $v \in \text{span}(A) \cap \text{span}(B)$, $v \neq 0$ זאת אומרת שישנם $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ ו- $v_1, \dots, v_k \in A$ וכן $u_1, \dots, u_m \in B$, $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{F}$ כך ש

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = v = \sum_{i=1}^m \beta_i u_i$$

מכיון ש $v \neq 0$ נקבל שיש α_i, β_j שונים מאפס. ולכן

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^m \beta_i u_i = v - v = 0$$

צירוף לינארי לא טריוויאלי של הקבוצה $A \cup B$ שמתאפס.

(ג) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ מממד $n \geq 2$, ויהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V . לכל $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ מתקיים: $B' = \{v_1, v_2 + \alpha_2 v_1, \dots, v_n + \alpha_n v_1\}$ בסיס של V (כלומר, לכל $2 \leq i \leq n$ מוסיפים ל- v_i כפולה כלשהי של v_1).

פתרון: הוכחה: יהא

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 (v_2 + \alpha_2 v_1) + \cdots + \beta_n (v_n + \alpha_n v_1) = 0$$

צירוף לינארי המתאפס, ונראה שלכל i מתקיים $\beta_i = 0$ אכן נקבל:

$$(\beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \cdots + \alpha_n \beta_n) v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n = 0$$

B בסיס ולכן נקבל שכל המקדמים כאן הם 0:

$$\beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \cdots + \alpha_n \beta_n = 0 (*)$$

וכן לכל $i \geq 2$ נקבל $\beta_i = 0$, נציב את האפסים הללו ב* ונקבל $\beta_1 = 0$.

4. (8 נקודות כל סעיף)

(א) תזכורת להגדרה: יהי V מרחב וקטורי ויהיו U, W תתי-מרחבים. נאמר ש V הוא סכום ישר של U, W ונסמן

$$V = U \oplus W \text{ אם } V = U + W \text{ וגם } U \cap W = \{0\}$$

תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הוכיחו: $\text{rank}(A^2) = \text{rank}(A)$ אם ורק אם $\mathbb{F}^n = C(A) \oplus N(A)$.

פתרון:

כיוון ראשון. נניח $\text{rank}(A^2) = \text{rank}(A)$. נוכיח סכום ישר:

- $C(A) \cap N(A) = \{0\}$: נניח בשלילה שיש $v \in C(A) \cap N(A)$, $v \neq 0$, מהעובדה ש $v \in C(A)$ נקבל שיש u כך ש $Au = v \neq 0$, ומהעובדה ש $v \in N(A)$ נקבל ש $A^2u = A \cdot Au = Av = 0$, לכן $u \in N(A)$, מכיון ש $N(A^2) \subseteq N(A)$, $u \notin N(A)$, $A^2v = A(Av) = A0 = 0$ אז $Av = 0$ שהרי אם $N(A) \subseteq N(A^2)$ נקבל בסהכ $\dim N(A^2) > \dim N(A)$ ולכן

$$\text{rank}(A^2) = \dim C(A^2) =$$

$$n - \dim N(A^2) < n - \dim N(A) = \text{rank}(A)$$

בסתירה.

- $C(A) + N(A) = \mathbb{F}^n$: נובע ממשפט המימדים:

$$\dim(C(A) + N(A)) =$$

$$\dim C(A) + \dim N(A) - \underbrace{\dim(C(A) \cap N(A))}_{=0} =$$

$$\dim C(A) + \dim N(A) = n$$

מכיון שתמיד $C(A) + N(A) \subseteq \mathbb{F}^n$ נקבל מ'הכלה ושיוויון מימדים' $C(A) + N(A) = \mathbb{F}^n$.
כיוון שני: נניח סכום ישר ונוכיח שיוויון דרגות. תמיד מתקיים

$$C(A^2) \subseteq C(A)$$

נראה כיוון הפוך בהנחת סכום ישר: יהי $Au \in C(A)$, מהנחת סכום ישר נקבל שישנם $Aw \in C(A), v \in N(A)$ כך ש $u = Aw + v$ מכאן נקבל:

$$Au = A(Aw + v) = A^2w + \underbrace{Av}_{=0} = A^2w \in C(A^2)$$

בסהכ

$$C(A^2) = C(A)$$

ולכן

$$\text{rank}(A^2) = \dim C(A^2) = \dim C(A) = \text{rank}(A)$$

(ב) תהייה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הוכיחו שאם $AB = 0$ אז $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$.

פתרון: מהשיוויון $AB = 0$ נקבל $C(B) \subseteq N(A)$ כמו בשאלה 1. לכן:

$$\text{rank}(B) = \dim C(B) \leq \dim N(A) = n - \text{rank}(A)$$

נעביר אגפים ונקבל הדרוש.

5. (8 נקודות כל סעיף) יהיו V, W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל $\mathbb{R}$, ותהא $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם לכל שני בסיסים סדורים B, C ל V, W קיים i כך ש

$$C_i([T]_C^B) = 0$$

(העמודה ה- i של המטריצה המייצגת היא עמודת אפסים) אז $T = 0$ (העתקת האפס).

פתרון: נניח בשלילה $T \neq 0$ כלומר, קיים v_1 כך ש $Tv_1 = w_1 \neq 0$. נרצה להגדיר את הבסיס של V :

$$B = \{v_1, \dots, v_n\}$$

לשם כך נתחיל מלהשלים את v_1 לבסיס של V :

$$B' = \{v_1, u_2, \dots, u_n\}$$

בנוסף, נשלים את $Tv_1 = w_1$ לבסיס של W :

$$C = \{w_1, \dots, w_m\}$$

לכל $2 \leq i \leq n$, אם $Tu_i \neq 0$ אז נקבל $C_i \left([T]_C^{B'} \right) \neq 0$. ולכן ניקח

$$v_i = u_i$$

אם $Tv_i = 0$ נחליף

$$v_i = u_i + v_1$$

ואז

$$Tv_i = T(u_i + v_1) = Tv_1 \neq 0$$

נותר להוכיח שלהוסיף לחלק מקבוצה בתל את v_1 משאיר אותנו בתל, וזה נובע משאלה ג3.

(ב) אם לכל שני בסיסים סדורים B, C ל V, W קיימים i, j כך ש

$$\left([T]_C^B \right)_{i,j} = 0$$

(האיבר במקום ה- i, j של המטריצה המייצגת הוא 0) אז $T = 0$ (העתקת האפס).

פתרון: נניח בשלילה $T \neq 0$ כלומר, קיים $v_1 \in V$ כך ש $Tv_1 \neq 0$. נרצה להגדיר את הבסיסים של V, W :

$$B = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$C = \{w_1, \dots, w_m\}$$

לשם כך נתחיל מלהשלים את v_1 לבסיס של V :

$$B' = \{v_1, u_2, \dots, u_n\}$$

בנוסף, נשלים את Tv_1 לבסיס של W :

$$C' = \{Tv_1, w_2, \dots, w_m\}$$

ניקח:

$$w_1 = Tv_1 - \sum_{i=2}^m w_i$$

ונגדיר את הבסיס

$$C = \{w_1, \dots, w_m\}$$

בתור התחלה נשים לב:

$$Tv_1 = \sum_{i=1}^m w_i$$

מה שאומר

$$C_1([T]_C^{B'}) = [Tv_1]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

כעת, לכל $2 \leq i \leq n$, נבחן את Tu_i : אם וקטור העמודה $[Tu_i]_C$ לא מכיל אפסים ניקח $v_i = u_i$, אם יש

אפסים, אז יש $\alpha \in \mathbb{R}$ כך ש $[T(\alpha v_1 + v_i)]_C$ לא מכיל אפסים: בהינתן $[Tv_1]_C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ שלא

מכיל אפסים, ובנוסף $[Tu_i]_C = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ יש n ערכי $\beta \in \mathbb{R}$ עבורם $\beta \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ מכיל

אפסים:

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_i}$$

ולכן לכל ערך אחר (ויש אינסוף אחרים) $\alpha \in \mathbb{R}$ נקבל

$$[T(\alpha v_1 + u_i)]_C = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ווקטור זה לא מכיל אפסים כאמור. למשל, אם $Tu_i = 0$ נחליף

$$v_i = u_i + v_1$$

ואז

$$Tv_i = T(u_i + v_1) = Tv_1$$

וכפי שכבר ראינו נקבל במקרה זה:

$$[Tv_i]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

נותר להוכיח שלהוסיף לחלק מקבוצה בתל כפולה של v_1 משאיר אותנו בתל, וזה נובע משאלה 3ג.