בדידה (88195), סמסטר קיץ תשפ"ו, מועד א'

19.8.2025, ו' באלול התשפ"ו

מרצים: אחיה בר-און, דניס גולקו, שירה ידעי, ארז שיינר.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

1. (9 נקודות כל סעיף) תהיינה A, B, C קבוצות. הוכיחו או הפריכו את הבאים:

(א) $A \cup (B \triangle C) = (A \cup B) \triangle (A \cup C)$.

(ב) אם $\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ אז $C \subseteq A \cup B$.

(ג) אם $A \cap B = \emptyset$ אז $A \cap (A \times B) = \emptyset$.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

2. (7 נקודות כל סעיף) פונקציה $f : A \to B$ תקרא תת-על אם הקבוצה $B \backslash \mathrm{Img}\,(f)$ סופית.
תהיינה $f : A \to B$ ו $g : B \to C$ פונקציות. הוכיחו/הפריכו:

(א) אם f, g שתיהן תת-על אז ההרכבה $g \circ f$ היא תת-על.

(ב) אם $g \circ f$ היא תת-על אז g היא תת-על.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

3. (7 נקודות כל סעיף) תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נגדיר יחס S על $\mathbb{R}$ כך:

$$y_1 S y_2 \iff |\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)=y_1\}| = |\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)=y_2\}|$$

(א) הוכיחו כי S יחס שקילות על $\mathbb{R}$.

(ב) נניח כי f מוגדרת על ידי $f(x)=x^2$. מצאו את עוצמת קבוצת המנה, $\mathbb{R}/S$. קבעו האם העוצמה סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$ או אחרת.

(ג) הוכיחו/הפריכו: אם f הפיכה אז $S=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

(ד) הוכיחו/הפריכו: אם $S=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ אז f הפיכה.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

4. (6 נקודות כל סעיף) תהיינה a, b, c עוצמות, כולן שונות מ 0.

(א) הוכיחו: $(a+b)^c \geq a^c + b^c$.

(ב) הוכיחו או הפריכו: אם b אינסופית אז $(a+b)^c = a^c + b^c$.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

5. תהא A קבוצה המקיימת $2 \leq |A|$.
נגיד שיחס R על A הוא **מחליף** אם

$$\forall a,b,c,d \in A : [aRb \wedge cRd] \Rightarrow [aRd \wedge cRb]$$

(א) (5 נקודות) יהא R יחס על A. הוכיחו: אם R מחליף אז R טרנזיטיבי.

(ב) יהא R יחס על A שהוא מחליף ואנטי-סימטרי. הוכיחו: $|R \cap I| \leq 1$ (כאשר I את יחס הזהות על A).

(ג) (5 נקודות כל סעיף) נסמן ב $\mathbb{S}$ את קבוצת כל היחסים R על A שמקימים R מחליף ואנטי-סימטרי ו $R \cap I = \emptyset$. ונתבונן ב $\mathbb{S}$ עם יחס ההכלה.

i. הוכיחו שקיים $R \in \mathbb{S}$ מקסימאלי.

ii. נתון $R \in \mathbb{S}$ מקסימאלי.
הוכיחו שקיימות קבוצות A_1, A_2 כך ש $\{A_1, A_2\}$ חלוקה של A ובנוסף מתקיים $R = A_1 \times A_2$.

iii. נניח ב A יש n איברים. מצאו כמה יחסים $R \in \mathbb{S}$ שהם מקסימאלים?

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___