פונקציות מרוכבות
תרגיל בית מס' 1 - פתרון

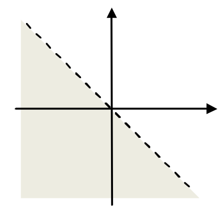
1. צייר את הקבוצות:

א. $D_1=\{z \mid |z-1|>|z+i|\}$

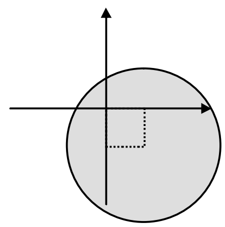
ב. $D_2=\{z \mid |z-1+i|\le 2\}$

<u>פתרון:</u>

א).



ב).



2. על סמך הזהות $1+z+z^2+...+z^n=\frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ $(z\neq 1)$, הוכח כי

$$\frac{1}{2}+\cos(\theta)+\cos(2\theta)+...+\cos(n\theta)=\frac{\sin(n+1/2)\theta}{2\sin(\theta/2)}$$

<u>פתרון:</u>

אם שני מספרים מרוכבים זהים, אז הן החלקים המדומים הן החלקים הממשיים שלהם שווים בהתאמה.

נמצא $\operatorname{Re}\frac{z^{n+1}-1}{z-1}$:

$$\operatorname{Re}\frac{z^{n+1}-1}{z-1}=\operatorname{Re}\frac{\left(z^{n+1}-1\right)\left(\bar{z}-1\right)}{\left(z-1\right)\left(\bar{z}-1\right)}=\operatorname{Re}\left[\frac{\left(\cos\left((n+1)\theta\right)+i\sin\left((n+1)\theta\right)-1\right)\left(\cos\theta-i\sin\theta-1\right)}{\left(\cos\theta+i\sin\theta-1\right)\left(\cos\theta-i\sin\theta-1\right)}\right]=$$

$$=\frac{\cos\left((n+1)\theta\right)\cos\theta+\sin\left((n+1)\theta\right)\sin\theta-\cos\left((n+1)\theta\right)+1-\cos\theta}{2-2\cos\theta}=\frac{\cos\left(n\theta\right)+1-\cos\left((n+1)\theta\right)-\cos\theta}{2-2\cos\theta}=$$

$$=\frac{2\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\sin\frac{\theta}{2}+2\sin^2\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin(n+1/2)\theta}{2\sin(\theta/2)}$$

3. עבור $z=1+2i$, מצא (בצורה של $a+ib$, ללא שימוש בנוסחת דה-מואבר):

א. z^n

ב. $\frac{1}{z}$

ג. $\frac{1}{z^n}$

ד. $z^2+2z+5+i$

<u>פתרון:</u>

א). $z^n=(1+2i)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2i)^k=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k}2^{2k}+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k+1}2^{2k+1}$ כאשר $[x]$ הוא חלק שלם של x.

ב). $\frac{1}{z}=\frac{1}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i}=\frac{1-2i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

ג). $\frac{1}{z^n}=\left(\frac{1}{z}\right)^n$, לכן לפי סעיף ב': $\frac{1}{(1+2i)^n}=\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right)^n=\frac{1}{5^n}(1-2i)^n$, בדומה לסעיף א' נקבל

$$\frac{1}{z^n}=\frac{1}{5^n}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k}2^{2k}-\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k+1}2^{2k+1}\right)$$

ד). נציב ונקבל: $4+9i$.

4. הוכח כי לכל $z\in\mathbb{C}$ $|z|\le|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|\le\sqrt{2}\cdot|z|$

<u>פתרון:</u>

האגף השמאלי של אי-השוויון נובע מתוך: $|z|=\sqrt{\mathrm{Re}^2 z+\mathrm{Im}^2 z}\le\sqrt{\left(|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|\right)^2}=|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|$

האגף הימני נובע מתוך אי-השוויון הטריביאלי $\left(|\mathrm{Re}\,z|-|\mathrm{Im}\,z|\right)^2\ge 0$, לכן

$$|\mathrm{Re}\,z|^2+|\mathrm{Im}\,z|^2-2|\mathrm{Re}\,z||\mathrm{Im}\,z|\ge 0 \implies |z|^2\ge 2|\mathrm{Re}\,z||\mathrm{Im}\,z| \implies$$

$$\implies 2|z|^2\ge 2|\mathrm{Re}\,z||\mathrm{Im}\,z|+|z|^2 \implies \sqrt{2}|z|\ge|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|$$

5. הוכח שמתקיים $\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|<1$ עבור $a,b\in\mathbb{C}$ המקיימים $|a|<1$ ו- $|b|<1$.

<u>פתרון:</u>

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|=\sqrt{\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\cdot\overline{\left(\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right)}}=\sqrt{\frac{(a-b)\cdot(\overline{a}-\overline{b})}{(1-\overline{a}b)\cdot(1-a\overline{b})}}=\sqrt{\frac{|a|^2+|b|^2-(a\overline{b}+\overline{a\overline{b}})}{1+|ab|^2-(a\overline{b}+\overline{a\overline{b}})}}=\sqrt{\frac{|a|^2+|b|^2-2\,\mathrm{Re}\,a\overline{b}}{1+|ab|^2-2\,\mathrm{Re}\,a\overline{b}}}$$

עתה נראה כי $|a|^2+|b|^2<1+|ab|^2 \implies |a|^2+|b|^2-2\,\mathrm{Re}\,a\overline{b}<1+|ab|^2-2\,\mathrm{Re}\,a\overline{b}$

נניח בשלילה כי: $|a|^2+|b|^2\ge 1+|ab|^2$ <=

$|a|^2+|b|^2\ge 1+|a|^2\cdot|b|^2 \implies |b|^2(|a|^2-1)\le(|a|^2-1) \implies_{|a|<1} \implies |b|^2\ge 1$ בסתירה לנתון.

לכן $\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|<1$.

6. מצא:

א. $\sqrt[3]{i}$

ב. $\sqrt[5]{1-i}$

ג. $\sqrt{3-i}$

ד. $\sqrt[4]{-1}$

<u>פתרון:</u>

א). $\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3},\ k=1,2,3.$

ב). $\sqrt[5]{1-i}=\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi k}{5}\right),\ k=0,1,\dots,4.$

ג). $\sqrt{3-i}=\dots=\sqrt[4]{10}\left(\cos\frac{\arctan(-1/3)+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\arctan(-1/3)+2\pi k}{2}\right),\ k=0,1.$

ד). $\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right),\ k=0,1,2,3.$

7. בהשתמש בזהות: $\cos(\pi/4)=\sin(\pi/4)=\sqrt{2}/2$, מצא:
א. $\cos(\pi/16)$
ב. $\sin(\pi/16)$

פתרון:

א). מתוך הזהות $\left(\cos\frac{z}{2}+i\sin\frac{z}{2}\right)^2=\cos z+i\sin z$ מוצאים כי $\sin z=2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}$ ו- $\cos z=\cos^2\frac{z}{2}-\sin^2\frac{z}{2}$ (*).

כיוון ש- $\cos\frac{z}{2}+i\sin\frac{z}{2}\in\{z\,||\,z|=1\}$, $\cos^2\frac{z}{2}+\sin^2\frac{z}{2}=1$. נציב את זה לזהות (*) ונקבל: $\cos\frac{z}{2}=\sqrt{\frac{\cos z+1}{2}}$. נפעיל את הנוסחה פעמיים על $\cos(\pi/4)$ ונקבל $\cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$

ב). באותו אופן, $\sin\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2}$.