וקטורים – בגישה משולבת
שאלון 035807
חלק א

ד"ר נעמי צ'יזיק

תשע"ז

מפגש 8 נצרת עילית

קביעת משוואת מישור על פי 3 נקודות

נתונות הנקודות $C(1,2,3)$ $B(1,1,0)$ $A(0,0,1)$

הנקודות לא על ישר אחד.

מצאו את המשוואה הכללית של המישור ABC, במספר דרכים.

פתרון ג

$$(a,b,c) \perp ABC$$

$$\overrightarrow{AB} = (1,1,-1) \qquad \overrightarrow{AC} = (1,2,2)$$

$$0 = (a,b,c)\cdot(1,1,-1) = a+b-c \qquad 0 = (a,b,c)\cdot(1,2,2) = a+2b+2c$$

$$\begin{cases} a+b-c=0 \\ a+2b+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \begin{cases} b=-3c \\ a=4c \end{cases}$$

$$c=t \qquad (a,b,c)=(4t,-3t,t)$$

$$t=1 \longrightarrow (a,b,c)=(4,-3,1)$$

$$\pi_{ABC}:\ 4x-3y+z=d$$

$$\pi_{ABC}:\ 4x-3y+z=1$$

מצב הדדי בין ישר ומישור

נתונים ישר ומישור $\pi: \quad ax+by+cz=d$ $\quad l: \underline{x}=\underline{v}+t\underline{w}$

א. $l \parallel \pi$ או נמצא עליו אם ורק אם $\underline{w}\perp(a,b,c)$ כלומר $\underline{w}\cdot(a,b,c)=0$

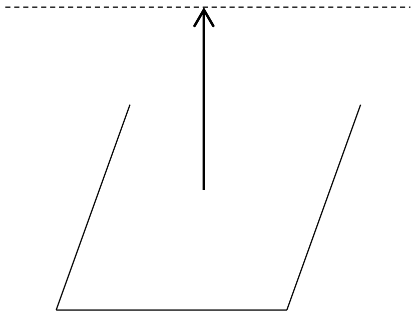
ב. $l \perp \pi$ אם ורק אם $\underline{w}\parallel(a,b,c)$, כלומר אם $\underline{w}$ תלוי ליניארית ב- (a,b,c)

דוגמה : מצאו את המצב ההדדי בין הישר והמישור הנתונים :

$$(x,y,z)=(1,1,1)+k(1,1,2) \qquad x+y-z=1$$

$$\underline{u}=(1,1,-1) \qquad \underline{u}\cdot(1,1,2)=1+1-2=0$$

כלומר, הישר מקביל למישור
או נמצא עליו.



נציב את שיעורי אחת מנקודות הישר במשוואת המישור לבדיקה :

1+1-1=1

כלומר, הישר נמצא על המישור.

דוגמאות....

דוגמה 1 (**גבי יקואל 007, עמוד 348, תרגיל 7)** **להגשה**

נתון המישור π שמשוואותו: $x+2y-z=0$ ונתון ישר $l:\underline{x}=(1,1,2)+t(1,-1,-1)$

הוכח שהישר מקביל למישור.

הציגו דרכים שונות!!

דוגמה 2 (וקטורים 4-5 יחידות, ד"ר אורי רימון , פרופ' שמשון עמיצור, עמ' 141, תרגיל 25)

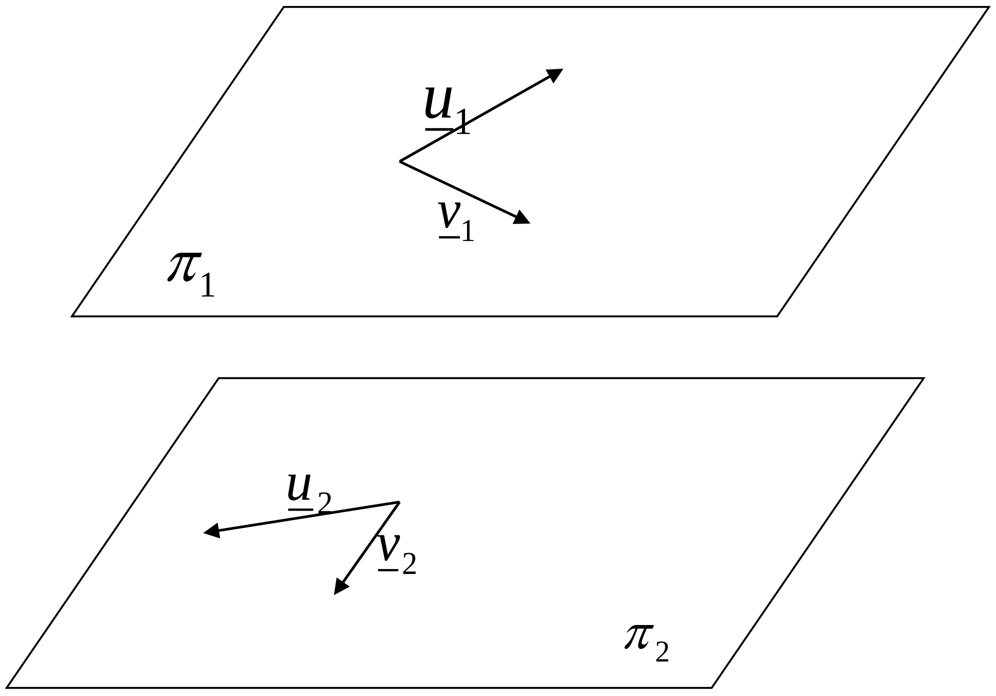
נתון מישור $\pi:2x-y+3z=4$. מצא ישר l שיעבור דרך הנקודה $(-1,1,0)$ יקביל למישור ויהיה ניצב לישר $k:\underline{x}=(0,1,2)+t(1,-2,0)$.

להגשה

דוגמה 3 חשבו את שטחו של משולש שקודקודיו: (-1,2,1) (-2,1,3) (1,1,0)

מקבילות והתלכדות של מישורים

בהצגה פרמטרית



מצב הדדי של שני מישורים – בהצגה תבניתית

נתונים המישורים :

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$

*אם **כל** המקדמים וגם האיברים החופשיים של המישורים פרופורציוניים בהתאמה –*

המישורים מתלכדים.

*אם המקדמים של המישורים, **פרט לאיברים החופשיים**, פרופורציוניים בהתאמה –*

המישורים מקבילים.

הסבר?

אם המישורים אינם מקבילים או מתלכדים – הם נחתכים.

נפתור את מערכת המשוואות שלמעלה.

למערכת 3 נעלמים ושתי משוואות – כלומר – דרגת חופש אחת.

הפתרון – משוואת ישר.

מצב הדדי של שני מישורים – דוגמה

דוגמה : נתונים שני המישורים $\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=5 \end{array}$. מהו מצבם ההדדי?

באם הם נחתכים, מצאו את ישר החיתוך.

<u>פתרון</u> :

$$z=t$$

$$I.\ x+y+t=3 \qquad y=3-x-t$$

$$II.\ 2x-y+t=5 \qquad 2x-(3-x-t)+t=5 \quad x=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}t$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}t$$

$$(x,y,z)=\left(\frac{8}{3},\frac{1}{3},0\right)+t\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$$

$$I.\ x+y+z=3$$

$$II.\ 2x+2y+2z=6$$

כאשר יש שתי משוואות שקולות (עם אותה קבוצת אמת), המצב זהה למשוואה אחת עם שלושה נעלמים. לכן נצטרך לבחור שני פרמטרים (יש לנו שתי דרגות חופש).

$$y=t \quad z=k \quad x=3-t-k$$

$$(x,y,z)=(3,0,0)+t(-1,1,0)+k(-1,0,1)$$

תרגיל מתוך משימות לבגרות שלמשרד החינוך, תשע"ד:

להגשה

משימה 2

נקודה A נמצאת במישור π_1 שמשוואתו היא $x - z - 2 = 0$.

נקודה B ונקודה C נמצאות במישור π_2 שמשוואתו היא $x - z - 12 = 0$.

א. מצא את הזווית בין ישר המאונך למישור π_1 ובין ציר ה־ y.

ב. נתון: הישר AC מקביל לישר שהצגתו הפרמטרית היא $\underline{x} = t(2, 0, -2)$.

מצא את האורך של AC. נמק.

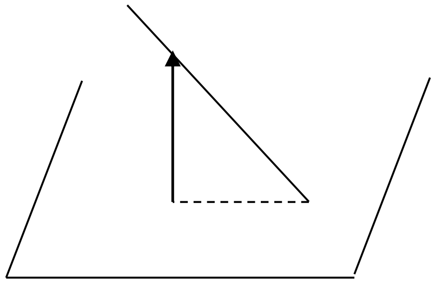
ג. נתון גם: $\overrightarrow{BC} = (2, -1, c)$.

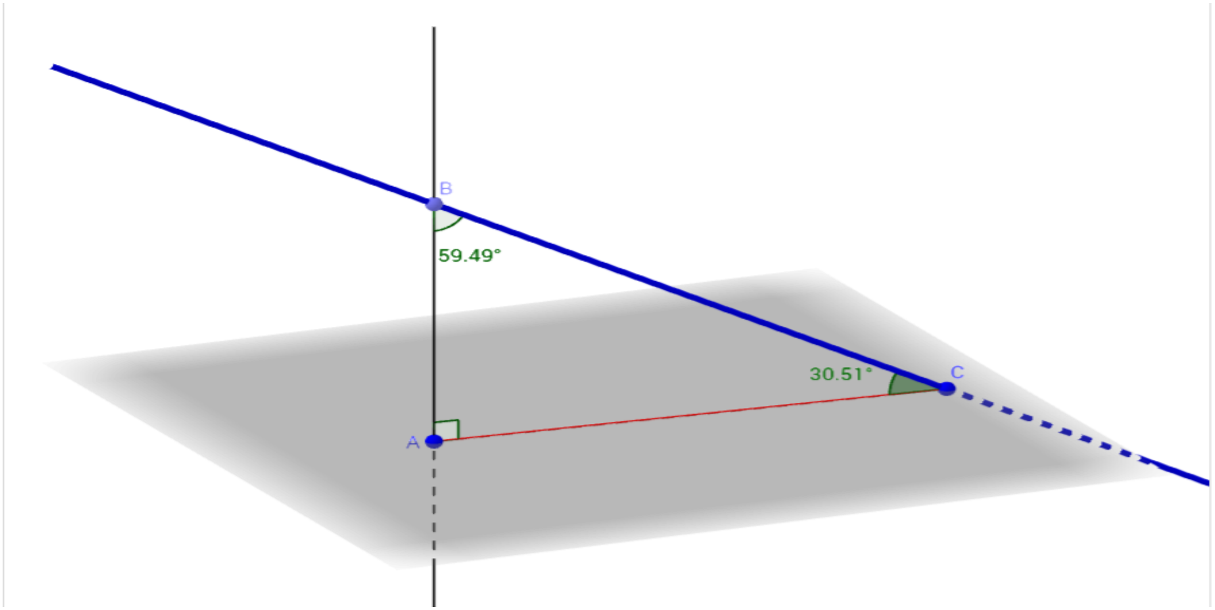
מצא את שטח המשולש ABC.

חישובי זוויות במרחב

<u>זווית בין שני ישרים</u> היא **הזווית הקטנה** בין וקטורי הכיוון שלהם.

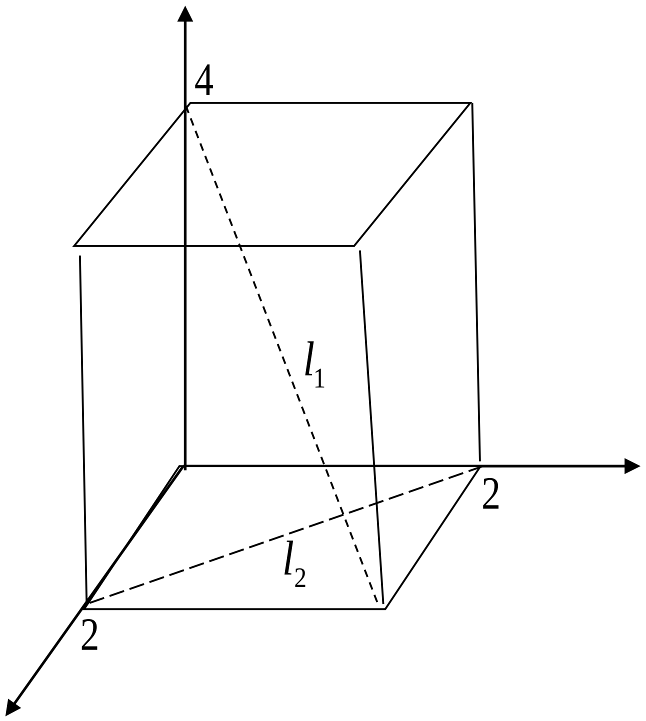
<u>זווית בין ישר ומישור</u> היא הזווית המשלימה ל-90 מעלות בין הישר ובין הניצב למישור.





דוגמה (מירון טימור – ווקטורים, עמוד 158,תרגיל 6)

א. חשבו את הזווית בין הישרים l_1 ו- l_2 .



$$l_1 : (0,0,4) + t(2,2,-4)$$

$$l_2 \ : (0,2,0) + s(2,-2,0)$$

$$(2,2,-4) \cdot (2,-2,0) = 0$$

$$\Rightarrow \theta = 90^\circ$$

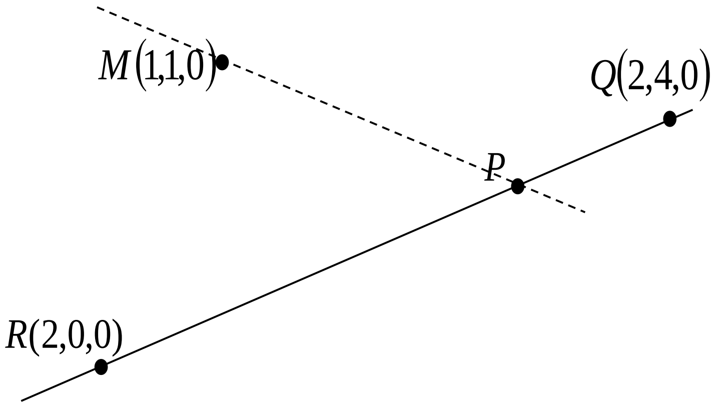
ב. חשבו את הזווית בין הישר l_1 למישור [YZ].

דוגמה (גבי יקואל – שאלון 007, עמוד 343, תרגיל 8)

נתונות שלוש נקודות שאינן על ישר אחד: $M(1,1,0)$, $R(2,0,0)$ ו- $Q(2,4,0)$

מצא נקודה P על הישר QR כך שהזווית בין הישר QR לבין הישר MP תהיה 45°.

נוסיף סקיצה לשאלה:



הצגה פרמטרית של QR:

$$\underline{x} = (2,0,0) + t(0,4,0)$$

לכן שיעורי הנקודה P על הישר: (2,4t,0)

וקטור הכיוון של הישר MP: (1,4t-1,0)

$$|(0,4,0)\cdot(1,4t-1,0)| = |4(4t-1)| = \sqrt{16}\sqrt{1+(4t-1)^2}\cos 45^0$$

$$|4t-1| = \sqrt{2}\sqrt{8t^2-4t+1}\cos 45^0 = \sqrt{2}\sqrt{8t^2-4t+1}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(4t-1)^2 = 8t^2-4t+1$$

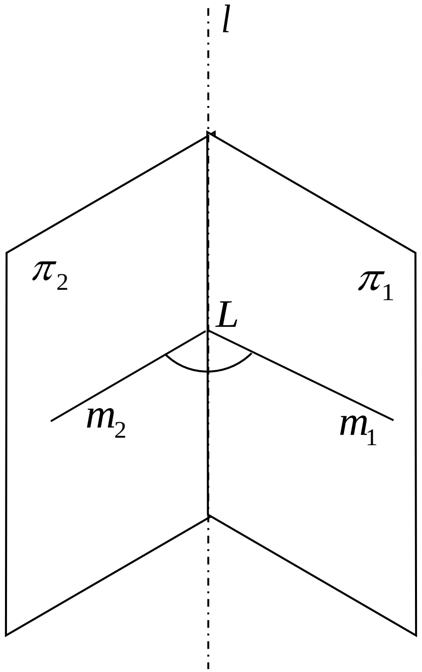
$$8t^2-4t=0$$

$$t_1 = 0 \quad , \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

שימו לב: כאשר t=0 אזי

!! 4t-1<0

זווית בין שני מישורים



הגדרה

נתונים שני מישורים π_1 ו-π_2, הנחתכים בישר l.

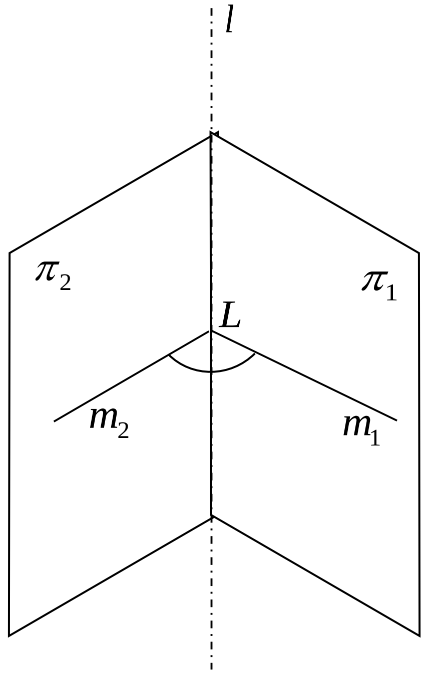
הזוית בין הישרים m_1 ו- m_2 אשר
עוברים דרך הנקודה L על ישר l,
ניצבים לישר l,
ונמצאים במישורים π_1 ו- π_2 בהתאמה,
נקראת זווית בין המישורים π_1 ו- π_2.

הזוית בין המישורים אינה תלויה בבחירת הנקודה L על ישר החיתוך בין המישורים.

הזווית $\theta = \angle(\pi_1, \pi_2)$ בין המישורים מקיימת: $0° \le \theta \le 90°$.

כאשר $\theta = 0°$ המישורים מתלכדים,

כאשר $\theta = 90°$ המישורים ניצבים.



מההגדרה נובע: כדי לחשב את הזווית בין המישורים משתמשים בנוסחה לחישוב הזווית בין שני ישרים:

כאשר $\underline{a}$ וקטור הכיוון של m_1 ו- $\underline{b}$ וקטור הכיוון של m_2:

$$\left|\underline{a} \cdot \underline{b}\right| = \left|\underline{a}\right| \left|\underline{b}\right| \cos\theta$$

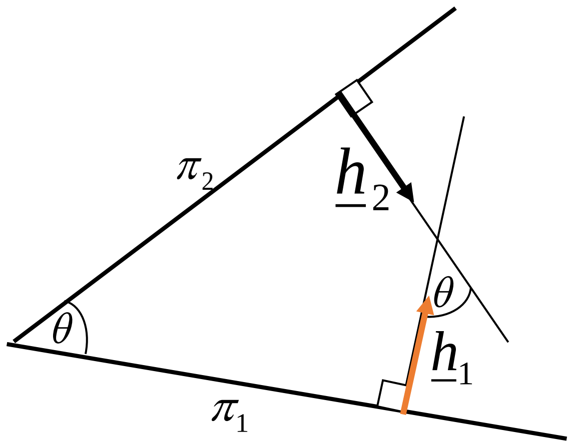
נראה דרך פשוטה יותר...

משפט

הזווית בין שני מישורים שווה לזווית שבין הישרים הניצבים למישורים.

כלומר, נתון: $h_1 \perp \pi_1$ ו- $h_2 \perp \pi_2$,

צריך להוכיח: $\theta = \angle(\pi_1, \pi_2) = \angle(h_1, h_2)$.



$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$\cos\theta = \cos\angle(\pi_1, \pi_2) = \cos\angle(h_1, h_2) = \frac{|\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2|}{|\underline{h}_1||\underline{h}_2|} = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

<u>דוגמה (גבי יקואל, שאלון 007, עמוד 352 תרגיל 13)</u> **להגשה**

נתון מישור $\pi_1 : x+2y+2z=6$. מישור π_2 מכיל את ציר ה-Z.

הזווית בין מישור π_1 ומישור π_2 היא 45°

מהי משוואת המישור π_2 ?

<u>דוגמה (וקטורים 4-5 יחידות, ד"ר אורי רימון , אוניברסיטת ירושלים. עמוד 143, תרגיל 37)</u>

נתון הטטראדר $D(0,0,6)$ $C(0,-4,0)$ $B(2,0,0)$ $A(2,3,-5)$

מצא את הזווית בין המקצוע AB לבין הפאה BCD .