

תרגיל בית 1 בהסתברות וסטטיסטיקה מתמטית 88-373 סמסטר ב' תשפ"א

משתנים מקריים

תרגיל 1 (תזכורת מתורת המידה). יהי (Ω, \mathcal{F}) מרחב מדיד, ויהיו X_1, X_2, \dots משתנים מקריים על Ω (כלומר פונקציות מדידות $\mathbb{R} \rightarrow \Omega$). ודאו שאתם זוכרים מדוע הפונקציות הבאות גם מהוות משתנה מקרי: $X_1 + X_2, X_1 \cdot X_2, 5 \cdot X_1, X_n$.
 $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$.

בורל-קנטלי

תרגיל 2. יהיו X_1, X_2, \dots משתנים מקריים בלתי-תלויים על מרחב הסתברות (Ω, \mathcal{F}, P) עם התפלגות

$$P(X_n = n^3) = 1 - \frac{1}{n^3}, \quad P(X_n = n^3 - n^6) = \frac{1}{n^3}$$

מהו $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n]$? מהו $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n^3}$?

תרגיל 3. יהי (Ω, \mathcal{F}, P) מרחב הסתברות, ותהי $\{X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}\}$ סדרת משתנים מקריים. הוכיחו שקיימת סדרת מספרים ממשיים חיוביים $\{c_n\}$ כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n X_n(\omega) = 0$ (כלומר, הסיכוי שהגבול קיים ושווה ל-0 הוא 1).
 (הדרכה: הראו שלכל n קיים k_n שעבורו $P(\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega)| > k_n\}) < \frac{1}{2^n}$, והיעזרו בלמת בורל-קנטלי על המאורעות האלו).

תרגיל 4. נטיל מטבע מוטה עם הסתברות p ליפול על "פלי" והסתברות $1-p$ ליפול על "עץ" אינסוף פעמים (נניח $0 < p < 1$). התשובות לסעיפים הבאים עשויות להיות תלויות ב- p .

א. נתון $n \in \mathbb{N}$. מה ההסתברות שהרצף n פעמים "פלי" ייצא פעם אחת לפחות?

ב. נתון $n \in \mathbb{N}$. מה ההסתברות שהרצף n פעמים "פלי" ייצא אינסוף פעמים?

חוק ה-1-0 של קולמוגורוב

תרגיל 5. תהי קבוצה, ויהיו $X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות. הוכיחו כי קיימת σ -אלגברה מינימלית על Ω , שנסמנה $\sigma(\{X_n\}_{n=1}^\infty)$, שביחס אליה כל X_n מדיד.
 (שימו לב שאם (Ω, \mathcal{F}) מרחב מדיד וכל X_n הוא \mathcal{F} -מדיד, אז $\sigma(\{X_n\}_{n=1}^\infty) \subseteq \mathcal{F}$).

תרגיל 6. תהי $\{a_n\}$ סדרת מספרים ממשיים, ויהיו s_n מ"מ ב"ת המתפלגים אחד על הקבוצה $\{1, -1\}$. הסבירו מדוע המאורע $\{\sum_{n=1}^\infty s_n a_n < \infty\}$ הוא מאורע זנב ביחס ל- s_1, s_2, \dots .
 הסבירו את המשמעות.