ב"א אנליזה 2 תשפ מועד א

1. חשבו את:

(א) $\int\frac{x^4+3x^3+5x^2+5x+3}{(x+1)(x^2+2x+2)}\mathrm{d}x$.

פתרון: נבצע חילוק פולינומים בין המונה שמדרגה 4 למכנה שהוא

$$(x+1)\left(x^2+2x+2\right)=x^3+3x^2+4x+2$$

שמדרגה 3:

$$\begin{array}{r|l} & \quad x \\ x^3+3x^2+4x+2 & \quad x^4+3x^3+5x^2+5x+3 \\ & -x^4-3x^3-4x^2-2x \\ \hline & \quad x^2+3x+3 \end{array}$$

וקיבלנו ש

$$x^4+3x^3+5x^2+5x+3=x(x+1)\left(x^2+2x+2\right)+\left(x^2+3x+3\right)$$

ולכן

$$\int\frac{x^4+3x^3+5x^2+5x+3}{(x+1)(x^2+2x+2)}\mathrm{d}x=\int\frac{x(x+1)\left(x^2+2x+2\right)+\left(x^2+3x+3\right)}{(x+1)(x^2+2x+2)}\mathrm{d}x=$$

$$\int x\mathrm{d}x+\int\frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+2x+2)}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\int\frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+2x+2)}\mathrm{d}x$$

נמשיך עם האינטגרל השני. נשים לב ש x^2+2x+2 פולינום אי פריק (הוא מדרגה 2 ואין לו שורשים). לכן הפירוק לשברים חלקיים הוא

$$\frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+2x+2)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{Bx+C}{(x^2+2x+2)}$$

עבור איזה שהן קבועים A,B,C. נמצא אותם: נעשה מכנה משותף ונשווה מונים לקבל

$$x^2+3x+3=A\left(x^2+2x+2\right)+(Bx+C)(x+1)$$

וכעת נוכל להציב $x=-1$ לקבל

$$1=A$$

ולכן $A=1$. נציב $x=0$ לקבל

$$3 = 1\cdot 2 + C$$

ולכן $C=1$. לסיום נשווה את המקדם של x^2 בשני האגפים - באגף שמאל זה 1 ובאגף ימין זה $A+B$ לכן

$$1 = A + B$$

וקיבלנו ש

$$B = 1 - A = 1 - 1 = 0$$

לכן:

$$\int \frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+2x+2)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x^2+2x+2)}\mathrm{d}x =$$

$$= \ln|x+1| + \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x = \ln|x+1| + \arctan(x+1) + C$$

כאשר האינטגרל האחרון מחושב לפי ה"זכרו". לסיכום התרגיל:

$$\int \frac{x^4+3x^3+5x^2+5x+3}{(x+1)(x^2+2x+2)}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| + \arctan(x+1) + C$$

(ב) $\int \frac{\sin(e^{-x})}{e^x}\mathrm{d}x$.

פתרון: נשתמש בהצבה:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(e^{-x})}{e^x}\mathrm{d}x &= \int \sin\left(e^{-x}\right)e^{-x}\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} t = e^{-x} \\ \mathrm{d}t = -e^{-x}\mathrm{d}x \end{array}\right\} = \\ &= \int -\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \cos(t) + C \\ &= \cos(e^{-x}) + C\end{aligned}$$

.2

(א) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x) = \frac{x^3-x^2-2x}{(x+1)^2}$.

פתרון: נשים לב כי

$$x^3 - x^2 - 2x = x\left(x^2 - x - 2\right) = x(x-2)(x+1)$$

ולכן $f(x) = \frac{x(x-2)}{x+1}$ לכל $x \neq -1$. כעת:

אסימפטוטות אנכיות: הפונקציה לא מוגדרת -1, נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-x^2-2x}{(x+1)^2}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x-2)}{x+1}=\left\{\frac{3}{0^{\pm}}\right\}=\pm\infty$$

כאשר הסימן ∞ כאשר הגבול מימין ל -1 הוא ∞ והגבול משמאל ל -1 הוא $-\infty$ ולכן יש אסימפטוטה אנכית ב $x=-1$.

אסימפטוטה משופעת מימין: נחשב את הגבול

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1\cdot 1}{1}=1$$

ואז

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x-2)}{x+1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x-2)-x(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{x+1}=-3$$

ולכן יש אסימפטוטה משופעת מימין שהיא $x-3$.

אסימפטוטה משופעת משמאל: נחשב את הגבול

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=1$$

ו

$$b=\lim_{x\to-\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(x-2)}{x+1}-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(x-2)-x(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{x+1}=-3$$

ולכן יש אסימפטוטה משופעת משמאל שהיא $x-3$.

(ב) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x)=e^{\ln(x)}$.

פתרון: לכל $x>0$ מתקיים כי $f(x)=x$ ולכל $x\leq 0$ הפונקציה לא מוגדרת. לכן אין ל f יש רק אסימפטוטה משופעת מימין שהיא הישר x.

.3

(א) חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x^2}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{x-x\cos(x)}.$$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x\to 0}\int_{-x}^{x^2}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t=0$ (כיוון ש $\sin\left(t^2\right)$ רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0) נוכל בעזרת המשפט היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x^2}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{x-x\cos(x)}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\left(x^4\right)-(-1)\sin\left(x^2\right)}{1-\cos(x)+x\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x\sin\left(x^4\right)+\sin\left(x^2\right)}{x^2}}{\frac{1-\cos(x)+x\sin(x)}{x^2}}$$

כעת נחשב את הגבול של המונה והמכנה ונגיע לתשובה הסופית:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\left(x^4\right)+\sin\left(x^2\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3\sin\left(x^4\right)}{x^4}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}=2\cdot 0\cdot 1+1=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)+x\sin(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\frac{1}{2}+1=1\frac{1}{2}$$

לכן התשובה הסופית היא

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x\sin\left(x^4\right)+\sin\left(x^2\right)}{x^2}}{\frac{1-\cos(x)+x\sin(x)}{x^2}}=\frac{1}{1\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k\sin\left(\frac{k}{n}\right)}{n^2}$.

פתרון: נראה שזהו סכום רימן:

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k\sin\left(\frac{k}{n}\right)}{n^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

ועבור $f(x)=x\sin(x)$ שהיא רציפה בקטע $[0,1]$ נקבל ש

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\sin(x)\mathrm{d}x$$

נחשב את $\int x\sin(x)\mathrm{d}x$ בעזרת אינטגרציה בחלקים:

כעת נקבל

$$\int x\sin(x)\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{ccc} g=x & \Rightarrow & g'=1\\ f'=\sin(x) & & f=-\cos(x)\end{array}\right\}=-x\cos(x)+\int\cos(x)\mathrm{d}x=$$

$$=-x\cos(x)+\sin(x)+C$$

ולכן

$$a_n\to\int_0^1 x\sin(x)\mathrm{d}x=\left[-x\cos(x)+\sin(x)\right]\Big|_0^1=-\cos(1)+\sin(1)$$

וזוהי התשובה הסופית.

.4

(א) קרבו את $\frac{1}{\sqrt{e}}$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.

פתרון: טור טיילור של e^x הוא

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ואם נציב $x = -\frac{1}{2}$, נקבל

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot 2^n}$$

וונקבל שזהו טור לייבניץ ולכן מתקיים שלכל k, יש את החסם

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot 2^n}\right| \leq \left|\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k}\right| = \frac{1}{k! \cdot 2^k}$$

שזהו חסם על השגיאה $\left|\frac{1}{\sqrt{e}} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^n}{n! \cdot 2^n}\right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{100}$ נחפש k עבורו $\frac{1}{100} \leq \frac{1}{k! \cdot 2^k}$. עבור $k = 4$ נקבל $\frac{1}{100} < \frac{1}{384} = \frac{1}{4! \cdot 16}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{4-1} \frac{(-1)^n}{n! \cdot 2^n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} - \frac{1}{3! \cdot 2^3} = \frac{29}{48} \approx 0.604166$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$כמבוקש.

(ב) חשבו את $f^{(46)}(0)$ עבור $f(x) = 2\sin(x)\cos(x)$.פתרון: נשים לב ש $f(x) = \sin(2x)$ (זהות טריגו'). כעת, פיתוח טיילור של $\sin(x)$ סביב 0 הוא

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

לכן טור טיילור של $\sin(2x)$ הוא

$$\sin(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

לפי התיאוריה, ידוע שהמקדם של x^{46} הוא $\frac{f^{(46)}(0)}{46!}$. בטור שמצאנו המקדם של x^{46} הוא 0 (בטור שלנו, החזקות שהמקדם שלהם לא אפס הם אי זוגיות מהצורה $2n+1$) לכן

$$\frac{f^{(46)}(0)}{46!} = 0$$

ומכאן ש $f^{(46)}(0) = 0$.

5. תהא f פונקציה רציפה המקיימת לכל $x \in \mathbb{R}$ כי $f(x) = f(-x)$, וכמו כן $y = mx + b$ אסימפטוטה משופעת מימין של f.

(א) הוכיחו/הפריכו: $y = -mx - b$ אסימפטוטה משופעת משמאל של f .

פתרון: הפרכה: הפונקציה הקבועה $f(x)=1$ מקיימת כי $f(x)=1=f(-x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$ אבל

$$y=1$$

היא אסימפטוטה משופעת גם מימין וגם משמאל (לעומת $y=-1$ שאיננה).

(ב) הוכיחו/הפריכו: $\lim\limits_{x\to(-\infty)} f(x)+mx=b$.

פתרון: טענה $y=-mx+b$ אסימפטוטה משופעת משמאל של f.

הוכחה: לכל $x\neq 0$ ממשי מתקיים כי

$$\frac{f(x)}{x}=-\frac{f(-x)}{-x}$$

ולכן

$$\lim_{x\to(-\infty)}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to(-\infty)}-\frac{f(-x)}{-x}=-\lim_{x\to(-\infty)}\frac{f(-x)}{-x}=-\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=-m$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהנתון ש $y=mx+b$ אסימפטוטה משופעת מימין של f. בנוסף, לפי אותו נתון,

$$\lim_{x\to(-\infty)}f(x)-(-mx)=\lim_{x\to(-\infty)}f(x)+mx=\lim_{x\to\infty}f(-x)+m\,(-x)=\lim_{x\to\infty}f(x)-mx=b$$

והוכחנו שאכן $y=-mx+b$ אסימפטוטה משופעת משמאל של f ובסוף ההוכחה הוכחנו את הדרוש בשאלה.