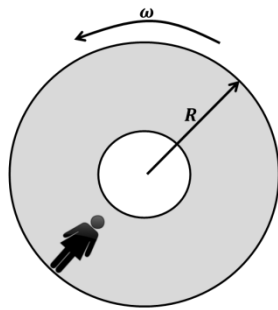
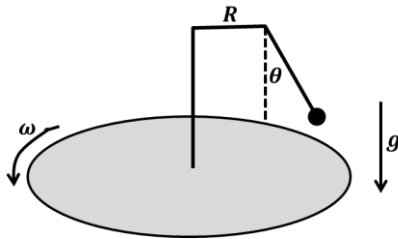


שאלות בנוס

1. מטוטלת באורך l קשורה לתקרת חללית הנעה בתאוצה a כלפי מעלה. מהי תדירות התנודות של המטוטלת? (בקירוב זוויות קטנות).



2. חללית משייטת בחלל במהירות קבועה. על מנת לדמות כבידה החללית מסתובבת סביב צירה כבשרטוט. רדיוס החללית R . מהי תדירות הסיבוב ω על מנת לדמות כבידה עם תאוצה דומה לזו שבכדור הארץ (g)? אסטרונוט מטפס במהירות קבועה v כלפי מעלה (דהיינו כלפי מרכז המעגל) – מהו הכוח שעליו להפעיל על מנת לנוע במסלול זה?



3. קרוסלה מסתובבת אופקית על פני כדור הארץ (דהיינו תחת שדה כבידה עם תאוצה g) במהירות זוויתית ω . מתקרת הקרוסלה במרחק R מן המרכז תלויה מטוטלת באורך l . חשבו את זווית ההטיה θ של המטוטלת ואת תדירות התנודות (הקטנות) שלה סביב θ .

קוואנטים

4. למערכת קוואנטית שני מצבים אפשריים $|x\rangle$ ו- $|y\rangle$ (מנורמלים $\langle x|x\rangle = \langle y|y\rangle = 1$; $\langle x|y\rangle = 0$) ובזמן $t = 0$ נתון כי מצב המערכת הוא $|\psi(0)\rangle = |x\rangle$. נתון האופרטור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

- א. תארו את מצב המערכת ב- $t = 0$ באמצעות מצבים עצמיים של A .
 ב. מהם ערכי האנרגיה האפשריים ומהי ההסתברות למדוד כל אחד מהם?
 ג. הראו במפורש תוך שימוש בסעיף ב' כי תוחלת האנרגיה מקיימת $\langle x|A|x\rangle$.
 ד. נתון כי אופרטור הקידום בזמן של המערכת הוא $U(t) = e^{iAt}$. רשמו את מצב המערכת בזמן t , דהיינו $|\psi(t)\rangle$, כקומבינציה לינארית (תלויה בזמן) של וקטורים עצמיים של A .
 ה. מהו אורך החיים של המצב $|x\rangle$? (כלומר הזמן האופייני לכך שמערכת במצב $|\psi\rangle = |x\rangle$ תיהפך למערכת "מעורבת" שבה יש גם ייצוג ל- $|y\rangle$, רמז: $\langle y|\psi(t)\rangle$)

5. המצבים העצמיים של חלקיק קוואנטי נתונים על ידי

$$|\psi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

אופרטור המיקום הוא x ואופרטור התנע הוא $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$. מצב החלקיק ברגע מסוים הוא

$$|\psi\rangle = i e^{-\frac{|x|}{2}}$$

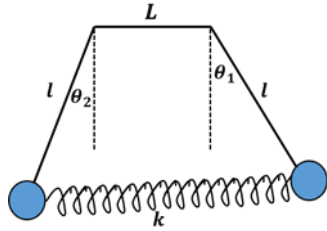
- א. חשבו את תוחלת המיקום $\langle x \rangle$ של החלקיק. מהי צפיפות ההסתברות $P(x = x_0)$ למצוא את החלקיק ב- x_0 ?
 ב. רשמו את תוחלת התנע $\langle p_x \rangle$.

- ג. הראו כי מצב עצמי של p_x מהו הערך העצמי המתאים?
 ד. מהי צפיפות ההסתברות $P(p_x = p_0)$ למדידה של תנע $p_0 = \hbar k$ עבור החלקיק (במצב $|\psi\rangle$).

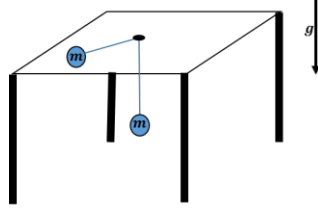
6. לחלקיק שני "מטענים" אפשריים - 0 או 1 - ולפיכך למערכת של שני חלקיקים ארבעה מצבים פוטנציאליים (אורתונורמליים): $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$. האנרגיה המיוחסת למצבים בהם החלקיקים מתואמים, דהיינו עם מטען זהה היא $E_{11} = E_{00} = -q$, עבור מצבים מעורבים שבהם לכל חלקיק מטען שונה $E_{01} = E_{10} = q$.
 א. הניחו כי ארבעת המצבים הם בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של אופרטור האנרגיה A . כעת רשמו את A במפורש על ידי שימוש בנוסאציה של דיראק (המשפט הספקטרלי).
 ב. נתונה מערכת במצב $|\psi\rangle = a_{11}|11\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{00}|00\rangle$ מנורמל, דהיינו $\sqrt{|a_{11}|^2 + |a_{01}|^2 + |a_{00}|^2} = 1$. מצאו את התפלגות האנרגיה $P(A = a)$ של המערכת.
 ג. מהי תוחלת האנרגיה $\langle A \rangle$?
 ד. נגדיר את האופרטור $B = |11\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11|$. הראו כי $\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle \pm |00\rangle)$ הם מצבים עצמיים של B .
 ה. מהם תוצאות המדידה האפשריות ומהי ההסתברות לכל אחת מהן כאשר מפעילים את B על $|\psi\rangle$?

מכניקה קלאסית

7. שתי מטוטלות בשדה כבידה g מצומדות על ידי קפיץ עם קבוע k (ראו שרטוט). במצב מנוחה כאשר שתי הזוויות מקיימות $\theta_1 = \theta_2 = 0$ הקפיץ רפוי באורך L .



- א. רשמו את הלגראנז'יאן של המערכת במונחים של הקואורדינטות θ_1 ו- θ_2 (השתמשו בקירוב זוויות קטנות על מנת להזניח סדרים גבוהים מ- θ^2).
 ב. קבלו את משוואת התנועה (אויילר-לגראנז') של המערכת.
 ג. כעת הגדירו $Q = \theta_2 - \theta_1$ ו- $W = \theta_1 + \theta_2$ ופתרו את המשוואות עבור $Q(t)$ ו- $W(t)$. מה המשמעות של פונקציות אלו?
 ד. בזמן $t = 0$ היתה המערכת במצב $\theta_1(0) = \theta_0$; $\theta_2(0) = 0$. קבלו את מצב המערכת כתלות בזמן $\theta_1(t)$; $\theta_2(t)$.



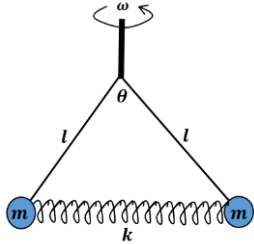
8. מערכת של 2 מסות מחוברות באמצעות חבל שאורכו L בשדה כבידה g על פי השרטוט. המסה העליונה מאולצת לנוע על מישור השולחן, והמסה התחתונה מאולצת לנוע לאורך הציר האנכי z .
 א. הגדירו מערכת קואורדינטות מתאימה ורשמו את הלגראנז'יאן של המערכת.
 ב. רשמו את משוואת התנועה עבור הקואורדינטות שמצאתם ב-א.
 ג. הראו כי התנע הזוויתי של המערכת $(L = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2)$ הוא גודל שמור.
 ד. מצאו את תדירות התנודות הקטנות של המערכת סביב שיווי משקל.

9. מסה m חופשית לנוע במישור x, y , ומחוברת לקפיץ שקצהו בנקודה $(0, 0, z_0)$ על ציר z .
 א. רשמו את הלגראנז'יאן של המערכת.
 ב. קבלו את משוואת התנועה.
 ג. מהו התנע הזוויתי? הראו כי הוא נשמר.
 ד. עבור תנאי התחלה עם תנע זוויתי L_0 , מהו הפוטנציאל האפקטיבי של המערכת?
 ה. חשבו את תדירות התנודות הקטנות סביב נקודת שווי המשקל של הפוטנציאל מן הסעיף הקודם.

10. גוף נע על פני המישור הדו-מימדי (r, θ) תחת השפעת הפוטנציאל המרכזי $U(r) = Cr^{-n}$.
 א. רשמו את הלגראנז'יאן של המערכת.

- ב. קבלו את משוואות התנועה.
 ג. מהו התנע הזוויתי? הראו כי הוא נשמר.
 ד. עבור תנאי התחלה עם תנע זוויתי L_0 , מהו הפוטנציאל האפקטיבי של המערכת?
 ה. חשבו את תדירות התנודות הקטנות סביב נקודת שווי המשקל של הפוטנציאל מן הסעיף הקודם.

11. מערכת של שתי מסות מחוברות על ידי קפיץ עם קבוע k ושתי זרועות קשיחות שאורכן l כפי שמופיע



- בשרטוט. הזרועות חופשיות להיפתח לכל זווית θ (באופן סימטרי, דהיינו שציר ה- z הוא חוצה הזווית). אורך המנוחה של הקפיץ גם הוא l . המערכת כולה חופשית להסתובב סביב ציר z במהירות זוויתית כלשהי ω (הניחו כי אין כבידה).
 א. בחרו קואורדינטות מתאימות ורשמו את הלגראנז'יאן של המערכת.
 ב. קבלו את משוואות התנועה.
 ג. מהו התנע הזוויתי? הראו כי הוא נשמר.
 ד. עבור תנאי התחלה עם תנע זוויתי L_0 , מהו הפוטנציאל האפקטיבי של המערכת?
 ה. חשבו את תדירות התנודות הקטנות סביב נקודת שווי המשקל של הפוטנציאל מן הסעיף הקודם.

12. גוף במסה $m = 1$ מאולץ לנוע במישור הדו-מימדי לאורך המסלול $y = ax$ (א $a < 1$ וקבוע), תחת השפעת

$$V(y) = \frac{1}{2}y^2$$

- א. רשמו את הלגראנז'יאן של המערכת באמצעות הקואורדינטה x .
 ב. קבלו את משוואות התנועה.
 ג. פתרו את המשוואות ומצאו את תנועת המערכת $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$.
 ד. מה הפתרון עבור $a > 1$?