

פתרון תרגיל בית 7, גיאומטריה אוקלידית ואנליטית, מתרגלת: זהבית צבי

עבור כל אחת מהתבניות הבאות ענו על הסעיפים הבאים:

א. כתבו את התבנית הנתונה בעזרת מטריצה סימטרית מתאימה.

ב. מצאו ע"ע וו"ע של המטריצה.

ג. לכסנו אורתוגונלית את המטריצה מסעיף ב'.

ד. השתמשו בהחלפת משתנים $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, כאשר P היא המלכסנת האורתוגונלית שמצאתם בסעיף ג', על מנת להגיע לצורה של התבנית שבה לא מופיע הגורם xy .

ו. כתבו את התבנית בצורה קנונית.

ז. צינו איזו צורה קנונית קבלתם ושרטטו סקיצה של הצורה הקנונית על גבי הצירים. הערה: נשים לב כי מדובר בשרטוט לא מדויק.

$$1. x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 0$$

$$2. 52x^2 + 73y^2 + 72xy + 120x + 160y + 75 = 0$$

$$3. 5x^2 + 8xy + 5y^2 + x + 3y = 0$$

$$4. 9x^2 + 24xy + 16y^2 + 5x - 15y - 8 = 0$$

$$5. 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$$

פתרון

1. שלב א': המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים

$a_{12} = a_{21} = -1$ מייצגים מקדמים של $xy = yx$ בהתאמה.

התבנית נכתבת כך:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{x'} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + (1 \ 1) \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x = 0 \quad (*)$$

המטריצה אינה אלכסונית, לכן נבצע עבודה לכסון אורתוגונלי.

שלב ב': נמצא את הערכים העצמים ע"י פתרון המשוואה: $|A - \lambda I| = 0$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$$

ולפי מה שלמדנו $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ ו- $\lambda_1 = 0 \neq \lambda_2 = 2$, לכן זו פרבולה.

נמצא את הווקטורים העצמים ע"י פתרון המערכת: $(A - \lambda I)v = 0$ לכל ע"ע שמצאנו.

עבור $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

נבחר שרירותית $y=1$ ונקבל מיד $x=1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ננרמל: $\|v_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ והוקטור המנורמל: $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} -x - y = 0 \Rightarrow x = -y$$

נבחר שרירותית $y=-1$ ונקבל מיד $x=1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

ננרמל: $\|v_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ והוקטור המנורמל: $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

שלב ג': המטריצה המלכסנת היא: $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא: $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

שלב ד': נציב $(x \ y) = (x' \ y')P^t \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

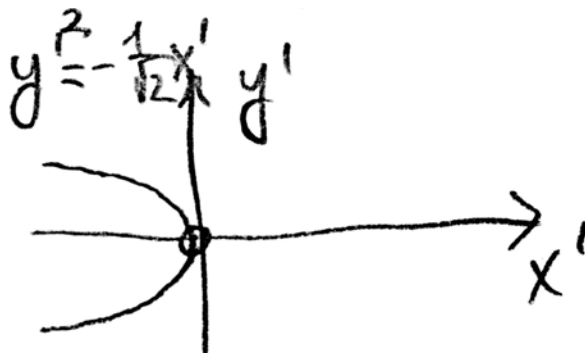
במשוואה (*) ונקבל:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{x'} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + (1 \ 1) \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (1 \ 1) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{P^t} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2y'^2 + \sqrt{2}x' = 0 \quad (:2) \Rightarrow y'^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x'$$

זו צורה קנונית של פרבולה שוכבת.
אזור:



2. שלב א': המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A = \begin{pmatrix} 52 & 36 \\ 36 & 73 \end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים

$a_{12} = a_{21} = 36$ מייצגים מקדמים של $xy = yx$ בהתאמה. התבנית נכתבת כך:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{x'} \underbrace{\begin{pmatrix} 52 & 36 \\ 36 & 73 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + (120 \quad 160) \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + 75 = 0 \quad (*)$$

המטריצה אינה אלכסונית, לכן נבצע עבודה לכסוף אורתוגונלי.

שלב ב': נמצא את הערכים העצמים ע"י פתרון המשוואה: $|A - \lambda I| = 0$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 52 - \lambda & 36 \\ 36 & 73 - \lambda \end{vmatrix} = (52 - \lambda)(73 - \lambda) - 1296 = 3796 - 52\lambda - 73\lambda + \lambda^2 - 1296 = \lambda^2 - 125\lambda + 2500 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 100, \lambda_2 = 25$$

ולפי מה שלמדנו $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ו- $\lambda_1 \neq \lambda_2$, לכן זו אליפסה. הו"ע המתאימים יהיו מלכתחילה אורתוגונליים לפי משפט.

נמצא את הווקטורים העצמים ע"י פתרון המערכת: $(A - \lambda I)v = 0$ לכל ע"ע שמצאנו.

עבור $\lambda_1 = 100$:

$$\begin{pmatrix} -48 & 36 \\ 36 & -27 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{9}R_2 \rightarrow R_2]{\frac{1}{12}R_1 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 4x - 3y = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}y$$

נבחר שרירותית $y = 4$ ונקבל מיד $x = 3$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

ננרמל: $u_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ והווקטור המנורמל: $\|v_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

עבור $\lambda_2 = 25$:

$$\begin{pmatrix} 27 & 36 \\ 36 & 48 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{12}R_2 \rightarrow R_2]{\frac{1}{9}R_1 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 3x + 4y = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}y$$

נבחר שרירותית $y = -3$ ונקבל מיד $x = 4$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

ננרמל: $\|v_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$ והוקטור המנורמל: $u_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$

שלב ג': המטריצה המלכסנת היא: $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא: $D = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$

שלב ד': נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left[P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right]^t \Rightarrow (x \ y) = (x' \ y') P^t$

במשוואה (*) ונקבל:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{x'} \underbrace{\begin{pmatrix} 52 & 36 \\ 36 & 73 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + (120 \ 160) \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + 75 = 0 \Rightarrow$$

$$(x' \ y') \underbrace{\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}}_{D=P^t A P} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (120 \ 160) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}}_{(200 \ 0)} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 75 = 0 \Rightarrow$$

$$100x'^2 + 25y'^2 + 200x' = -75$$

כעת נבצע השלמה לריבוע:

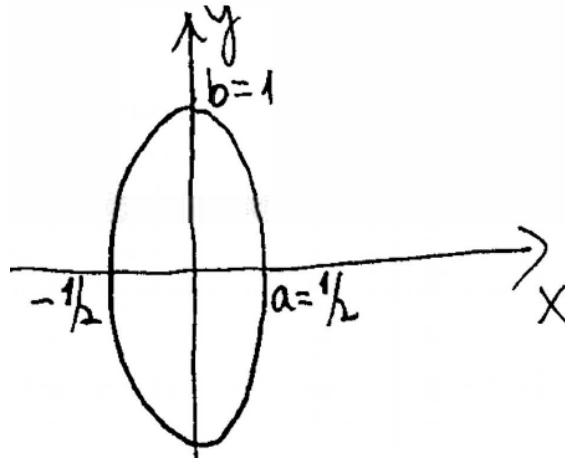
$$100x'^2 + 25y'^2 + 200x' = -75 \Rightarrow \left\{ \underbrace{\left(\frac{10x'}{u} \right)^2 + 2 \cdot \frac{10x'}{u} \cdot \frac{10}{v} + \frac{10^2}{v^2}}_{(u+v)^2} \right\} - 10^2 + 25y'^2 = -75 \Rightarrow$$

$$(10x'+10)^2 + 25y'^2 = -75 + 100 = 25 \Rightarrow (10(x'+1))^2 + 25y'^2 = 25 \Rightarrow 100(x'+1)^2 + 25y'^2 = 25 \quad (:25)$$

$$\Rightarrow \frac{(x'+1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y'^2}{1} = 1$$

נעשה החלפת משתנים (הזזה): $\tilde{x} = x'+1, \tilde{y} = y'$ ונקבל צורה קנונית: $\frac{\tilde{x}^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{\tilde{y}^2}{1^2} = 1$ זו אליפסה

יחסית לציר ה \tilde{y} , כי $b > a$.
איור:



3. שלב א': המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים

$a_{12} = a_{21} = 4$ מייצגים מקדמים של $xy = yx$ בהתאמה.

המשוואה הנתונה נכתבת כך: $(x \ y) \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1 \ 3) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ (*)

המטריצה אינה אלכסונית, לכן נבצע עבודה לכסון אורתוגונלי.

שלב ב': נמצא את הערכים העצמים ע"י פתרון המשוואה: $|A - \lambda I| = 0$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 16 = 25 - 10\lambda + \lambda^2 - 16 = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1$$

ולפי מה שלמדנו $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ו- $\lambda_1 \neq \lambda_2$, לכן זו אליפסה.

נמצא את הווקטורים העצמים ע"י פתרון המערכת: $(A - \lambda I)v = 0$ לכל ע"ע שמצאנו.

עבור $\lambda_1 = 9$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \quad 4x - 4y = 0 \Rightarrow x = y$$

נבחר שרירותית $y = 1$ ונקבל מיד $x = 1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ננרמל: $\|v_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ והווקטור המנורמל: $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

עבור $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 4x + 4y = 0 \Rightarrow x = -y$$

נבחר שרירותית $y = -1$ ונקבל מיד $x = 1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

נרמל: $\|v_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ והוקטור המנורמל: $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

שלב ג': המטריצה המלכסנת היא: $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא: $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

שלב ד': נציב $(x \ y) = (x' \ y')P^t \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

לאחר ההצבה מקבלים:

$$(x' \ y') \underbrace{P^t A P}_{D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} & -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 9x'^2 + y'^2 + 2\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' = 0$$

כעת נעשה השלמות לריבוע בכדי להכניס מחוברים ממעלה ראשונה לתוך סכום (או הפרש) ריבועים בעזרת נוסחאות הכפל המקוצר $(u \pm v)^2 = u^2 \pm 2uv + v^2$:

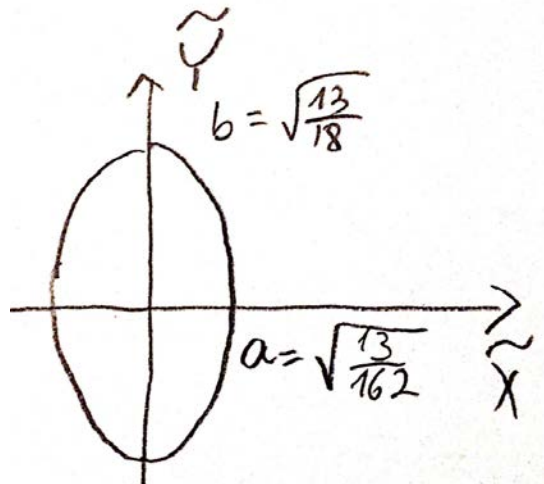
$$\left\{ \underbrace{(3x')^2}_u + 2 \cdot \underbrace{(3x')} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{3}}_v + \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}_{\frac{2}{9}} \right\} - \frac{2}{9} + \left\{ \underbrace{\left(\frac{y'}{1}\right)^2}_u - 2 \cdot \underbrace{y'} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_v + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}_{\frac{1}{2}} \right\} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(3x' + \frac{\sqrt{2}}{3} \right)^2 + \left(y' - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{2} = \frac{13}{18} \Rightarrow \left(3 \left(x' + \frac{\sqrt{2}}{9} \right) \right)^2 + \left(y' - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{13}{18} \Rightarrow$$

$$9 \left(x' + \frac{\sqrt{2}}{9} \right)^2 + \left(y' - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{13}{18} \left(\frac{13}{18} \right) \Rightarrow \frac{\left(x' + \frac{\sqrt{2}}{9} \right)^2}{\frac{13}{162}} + \frac{\left(y' - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2}{\frac{13}{18}} = 1$$

נרשום בצורה קנונית: $\tilde{x} = x' + \frac{\sqrt{2}}{9}$, $\tilde{y} = y' - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ונקבל: $\frac{\tilde{x}^2}{\frac{162}{a^2}} + \frac{\tilde{y}^2}{\frac{18}{b^2}} = 1$. זו אליפסה.

איור:



4. שלב א': המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים

$a_{12} = a_{21} = 12$ מייצגים מקדמים של $xy = yx$ בהתאמה. התבנית נכתבת כך:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{x'} \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -15 \end{pmatrix}}_x \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x - 8 = 0 \quad (*)$$

המטריצה אינה אלכסונית, לכן נבצע עבודה לכסון אורתוגונלי.

שלב ב': נמצא את הערכים העצמים ע"י פתרון המשוואה: $|A - \lambda I| = 0$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 9 - \lambda & 12 \\ 12 & 16 - \lambda \end{vmatrix} = (9 - \lambda)(16 - \lambda) - 144 = 144 - 9\lambda - 16\lambda + \lambda^2 - 144 = \lambda^2 - 25\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 25$$

ולפי מה שלמדנו $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ ו- $\lambda_1 = 0 \neq \lambda_2 = 25$, לכן זו פרבולה.

נמצא את הווקטורים העצמים ע"י פתרון המערכת: $(A - \lambda I)v = 0$ לכל ע"י שמצאנו.

עבור $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4}R_2 \rightarrow R_2]{\frac{1}{3}R_1 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 3x + 4y = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}y$$

נבחר שרירותית $y = -3$ ונקבל מיד $x = 4$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$u_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} : \text{ננרמל: } \|v_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

עבור $\lambda_2 = 25$:

$$\begin{pmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}R_1 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 4x - 3y = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}y$$

נבחר שרירותית $y = 4$ ונקבל מיד $x = 3$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

ננרמל: $\|v_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ והווקטור המנורמל: $u_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

שלב ג': המטריצה המלכסנת היא: $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא: $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t = \left[P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right]^t \Rightarrow (x \ y) = (x' \ y') P^t$$

במשוואה (*) ונקבל:

$$\underbrace{(x \ y)}_{x'} \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + (5 \ -15) \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$(x' \ y') \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}}_{D=P^tAP} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (5 \ -15) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}}_P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 8 = 0 \Rightarrow$$

(13 -9)

$$25y'^2 + 13x' - 9y' - 8 = 0$$

נבצע השלמה לריבוע:

זו פרבולה שוכבת. אם נחליף משתנים: $\tilde{y} = y' - \frac{9}{50}$, $\tilde{x} = \frac{881}{2500} - \frac{13}{25}x'$, נקבל צורה קנונית: $\tilde{y}^2 = -\tilde{x}$.

איור:

$$25y'^2 + 13x' - 9y' - 8 = 0 \Rightarrow \left\{ \left(\frac{5y'}{u} \right)^2 - 2 \cdot \frac{5y'}{u} \cdot \frac{9}{v} + \left(\frac{9}{v} \right)^2 \right\} + 13x' - 8 - \left(\frac{9}{v} \right)^2 = 0 \Rightarrow$$

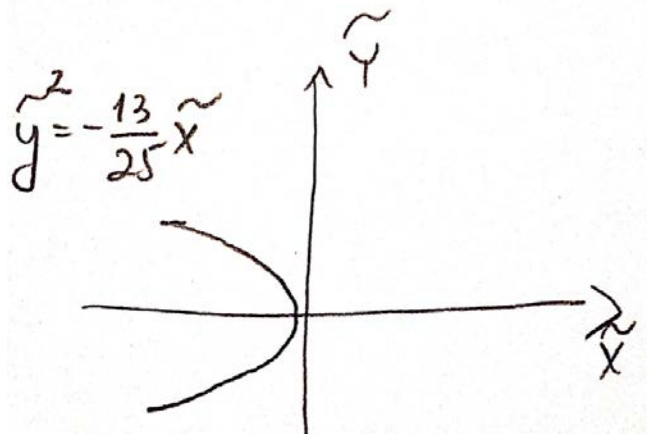
$$\left(5y' - \frac{9}{10} \right)^2 + 13x' - \frac{881}{100} = 0 \Rightarrow \left(5 \left(y' - \frac{9}{50} \right) \right)^2 + 13x' - \frac{881}{100} = 0 \Rightarrow 25 \left(y' - \frac{9}{50} \right)^2 + 13x' - \frac{881}{100} = 0 \quad (:25) \Rightarrow$$

$$\left(y' - \frac{9}{50} \right)^2 + \frac{13}{25}x' - \frac{881}{2500} = 0 \Rightarrow \left(y' - \frac{9}{50} \right)^2 = \frac{881}{2500} - \frac{13}{25}x'$$

נכתוב את הפרבולה בצורה קנונית כלומר רוצים להעביר אותה לראשית הצירים ולכן נקבל את

המשוואה: החלפת משתנים היא: $\tilde{y} = y' - \frac{9}{50}$, $\tilde{x} = x' - \frac{881}{2500} + \frac{13}{25}x'$ ונקבל: $\tilde{y}^2 = -\frac{13}{25}\tilde{x}$

איור:



.5

שלב א': המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים $a_{12} = a_{21} = 1$

מייצגים מקדמים של $xy = yx$ בהתאמה.

המשוואה הנתונה נכתבת באמצעות המטריצה באופן הבא:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{x'} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + (2 \ 2) \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x - 2 = 0 \quad (*)$$

המטריצה אינה אלכסונית, לכן נבצע עבודה לכסון אורתוגונלי.

שלב ב': נמצא את הערכים העצמים ע"י פתרון המשוואה: $|A - \lambda I| = 0$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$$

ולפי מה שלמדנו $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ו- $\lambda_1 \neq \lambda_2$, לכן זו אליפסה.

נמצא את הווקטורים העצמים ע"י פתרון המערכת: $(A - \lambda I)v = 0$ לכל ע"י שמצאנו.

עבור $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} -x+y=0 \Rightarrow x=y$$

נבחר שרירותית $y=1$ ונקבל מיד $x=1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$.u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{ננרמל: } \|v_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

עבור $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x+y=0 \Rightarrow x=-y$$

נבחר שרירותית $y=-1$ ונקבל מיד $x=1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$.u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{ננרמל: } \|v_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$.D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{שלב ג': המטריצה המלכסנת היא: } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{והאלכסונית הדומה היא: } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שלב ד':

$$\text{נציב } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t = \left[P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right]^t \Rightarrow (x \ y) = (x' \ y') P^t$$

$$\underbrace{(x \ y)}_{x'} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + (2 \ 2) \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(x' \ y') \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D=P^t A P} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (2 \ 2) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\left(\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \ 0 \right)}$$

$$3x'^2 + y'^2 + 2\sqrt{2}x' - 2 = 0$$

נבצע השלמה לריבוע:

$$3x'^2 + y'^2 + 2\sqrt{2}x' - 2 = 0 \Rightarrow \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}x'}{u} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}x'}{u} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^2 \right\} + y'^2 - 2 - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{3}x' + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^2 + y'^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow \left(\sqrt{3} \left(x' + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right)^2 + y'^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow 3 \left(x' + \frac{\sqrt{2}}{3} \right)^2 + y'^2 = \frac{8}{3} \left(\frac{8}{3} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\left(x' + \frac{\sqrt{2}}{3} \right)^2}{\frac{8}{9}} + \frac{y'^2}{\frac{8}{3}} = 1$$

נעשה החלפת משתנים (הזזה): $\tilde{x} = x' + \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\tilde{y} = y'$ ונקבל צורה קנונית: $\frac{\tilde{x}^2}{\left(\frac{\sqrt{8}}{3} \right)^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \right)^2} = 1$ זו אליפסה

יחסית לציר ה \tilde{y} , כי $b > a$.

איור:

