

## תרגיל 4 – לינארית

1. תהי  $A$  מטריצה הפיכה. הוכיחו את הטענות הבאות:

1.1. קיימת ל  $A$  מטריצה הופכית יחידה.

1.2.  $A^t$  הפיכה.

1.3.  $A^5$  הפיכה.

2. תהא  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(F)$ . נסמן  $\Delta = ad - bc$ . הוכיחו כי:

2.1. אם  $\Delta \neq 0$  אז  $A$  הפיכה ו  $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

2.2. אם  $\Delta = 0$  אז  $A$  אינה הפיכה.

3. (סכום סדרה הנדסית של מטריצות)

תהא  $A \in M_{n \times n}(F)$  כך שהמטריצה  $A - I$  הפיכה. הוכיחו באינדוקציה כי לכל  $k$  טבעי,

$$I + A + A^2 + \dots + A^k = (A^{k+1} - I)(A - I)^{-1}$$

4. תהי  $A$  מטריצה ריבועית. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

4.1. אם  $A + A^2$  הפיכה אז  $A$  הפיכה.

4.2. אם  $A$  הפיכה אז  $\text{trace}(A) \neq 0$ .

4.3. אם  $A^2 = A$  אז  $A = I$  או  $A$  אינה הפיכה.

4.4. אם  $A$  יש עמודת אפסים אז  $A$  אינה הפיכה.

5. עבור המטריצות הבאות  $A$ ,

5.1. קבעו האם  $A$  הפיכה.

5.2. אם  $A$  הפיכה:

5.2.1. מצאו את  $A^{-1}$ .

5.2.2. הציגו את  $A$  ואת  $A^{-1}$  כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix} \bullet$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \bullet$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \bullet$$

6. פתרו את מערכות המשוואות הבאות באמצעות מציאת מטריצה הופכית. אם המטריצה המתאימה למערכת אינה הפיכה, פתרו באמצעות דירוג.

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 4x - y + 5z = 6 \quad \mathbf{.6.1} \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4y + z = 5 \\ 2x - y - 2z = 3 \quad \mathbf{.6.2} \\ 3x - 5y - z = 10 \end{cases}$$

בהצלחה! 😊