

אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 7

שאלה 1

יהי K שדה הפיצול של $x^5 - 10$ מעל \mathbb{Q} . מצאו שני איברים ב- $Gal(K/\mathbb{Q})$ היוצרים את $Gal(K/\mathbb{Q})$ (אין צורך למצוא את כל החבורה!). עליכם לייצג האיברים שמצאתם בשתי דרכים: ע"י הפעולה שלהם על היוצרים של ההרחבה וע"י הפעולה שלהם על השורשים של $x^5 - 10$. בנוסף, הראו כי $Gal(K/\mathbb{Q})$ לא אבלית.

הדרכה: אם G חבורה ו- a_1, \dots, a_r איברים ב- G כך ש- $|G| = \text{lcm}(o(a_1), \dots, o(a_r))$ אז a_1, \dots, a_r יוצרים את G . [תזכורת: $o(a) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a^n = e\} = |\langle a \rangle|$ נסו להפעיל רעיון זה עבור $G = Gal(K/\mathbb{Q})$.

שאלה 2

יהי $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$. הראו כי $Gal(K/\mathbb{Q}) = \{id_K\}$. מדוע גודל החבורה לא שווה ל- $[K:\mathbb{Q}]$?

שאלה 3

יהי p ראשוני ו- $F = \mathbb{Z}_p(t)$ (שדה הפונקציות הרציונליות מעל \mathbb{Z}_p במשתנה t , כלומר שדה השברים של $\mathbb{Z}_p[t]$). נגדיר $f(x) \in F[x]$ ע"י $f(x) = x^p - t$.

1. הראו כי f אי פריק.
2. יהי $E = F[x]/\langle f(x) \rangle$. הראו כי שדה פיצול של f . [רמז: לכל $a(x), b(x) \in F[x]$ מתקיים $(a(x) + b(x))^p = a(x)^p + b(x)^p$].
3. הראו כי $Gal(E/F) = \{id_E\}$. מדוע גודל החבורה לא שווה ל- $[E:F]$?