חשבון אינפי 2 למדמ"ח

שיעור 5 (בפועל כנראה 6, אחרי שנסיים את שיטות האינטגרציה): נגזרת של פונקציה המוגדרת באמצעות אינטגרל, יישומים של אינטגרל מסוים לחישוב של שטח, נפח גוף סיבוב ואורך קשת.

משפט 1: תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ב-$[a,b]$ ותהי $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, אזי $F(x)$ גזירה לכל $x\in[a,b]$ ומתקיים $F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$.

משפט 2: תהיינה $h(x)$ רציפה ו-$f(x)$ ו- $g(x)$ גזירות, אזי

$$\frac{d}{dx}\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt=h(g(x))g'(x)-h(f(x))f'(x)$$

1. גזרו את הפונקציה $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}\cos(t^2)dt \quad x>0$

פתרון: לפי משפט 2 נקבל

$$F'(x)=\cos(\sqrt{x})^2(\sqrt{x})'-\cos\left(\frac{1}{x}\right)^2\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x+\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$$

2. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $F(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ בתחום $x>0$

פתרון:

$F'(x)=\frac{\sin x}{x}=0 \Leftarrow x=\pi n, n\in\mathbb{N}$ ואלה הן נקודות קריטיות

נבדוק את סוג הקיצון לפי הנגזרת השנייה

$F''(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2} \Leftarrow F''(\pi n)=(-1)^n\frac{1}{\pi n}$

אם $n=2k-1, k\in\mathbb{N}$ נקבל $F''(x)<0$ ולכן $x=\pi(2k-1)$ נקודות מקסימום

אם $n=2k, k\in\mathbb{N}$ נקבל $F''(x)>0$ ולכן $x=2k\pi$ נקודות מינימום

3. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\ln(\sin t)\,dt}{\cos^2 x}$$

פתרון: זהו גבול מהצורה "$\frac{0}{0}$", הפונקציות במונה ובמכנה גזירות (הפונקציה של המונה גזירה לפי משפט 1 לעיל) וקיימת סביבה מנוקבת של $\frac{\pi}{2}$ בה הנגזרת של המכנה $\left(\cos^2 x\right)'=-2\cos x\sin x$ אינה מתאפסת ולכן ניתן להשתמש בכלל לופיטל.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\ln(\sin t)\,dt}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{-2\sin x\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{-\sin 2x}$$ ושוב התנאים של כלל לופיטל מתקיימים ולכן ניתן להשתמש בכלל לופיטל פעם נוספת:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\ln(\sin t)\,dt}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{-2\sin x\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{-\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x\cdot 2\cos 2x}=0$$

ב. $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}$$

פתרון: זהו גבול מהצורה "$\frac{0}{0}$" והתנאים של כלל לופיטל מתקיימים ולכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot 2x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{3x}=\frac{2}{3}$$

נחזור לאינטגרלים מסוימים

1. חשבו את האינטגרלים המסוימים:

א. $$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\ln x\sin(\ln x+1)}{x}dx$$

פתרון: נציב : $t=\ln x+1$. במקרה זה $dt=\frac{1}{x}dx$ וגבולות האינטגרציה החדשים הם

$0=\ln\frac{1}{e}+1=-1+1=0$ - גבול תחתון, $t=\ln e+1=1+1=2$ גבול עליון.

אחרי ההצבה ושינוי גבולות האינטגרציה נקבל $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\ln x\sin(\ln x+1)}{x}dx=\int_0^2(t-1)\sin t dt$

אינטגרציה בחלקים : $f=t-1, g'=\sin t$. במקרה זה $f'=1, g=-\cos t$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\ln x\sin(\ln x+1)}{x}dx=\int_0^2(t-1)\sin t dt=-(t-1)\cos t\Big|_0^2-\int_0^2-\cos t dt$$

$$=-(2-1)\cos 2+(0-1)\cos 0+\sin t\Big|_0^2=-\cos 2-1+\sin 2$$

ב. $\int_e^{e^3}\left|x^2-5x-6\right|dx$

פתרון: נשים לב ש- $\left|x^2-5x+6\right|=\begin{cases}x^2-5x+6 & x\le 2\vee x\ge 3\\ -x^2+5x-6 & 2<x<3\end{cases}$ ו- $2<e<3<e^3$ ולכן

$$\int_e^{e^3}\left|x^2-5x+6\right|dx=\int_e^3\left(-x^2+5x-6\right)dx+\int_3^{e^3}\left(x^2-5x+6\right)dx=...=-9+\frac{19}{3}e^3-\frac{5}{2}e^2+6e+\frac{1}{3}e^9-\frac{5}{2}e^6$$

ג. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$

פתרון: נשים לב שתחום ההגדרה של $f(x)=\cos x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ הינו קטע $-1<x<1$,

בתחום זה הפונקציה רציפה ולכן אינטגרבילית לפי רימן בקטע $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

בנוסף $f(-x)=-f(x)$, כלומר הפונקציה אי זוגית ולכן $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx=0$.

נוסחאות לחישוב שטח

א. יהיו f ו- g פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$. אם $f(x)\ge g(x)$ לכל x בקטע,

אזי שטח התחום המוגבל ע"י העקומה $y=f(x)$ מלמעלה, העקומה $y=g(x)$

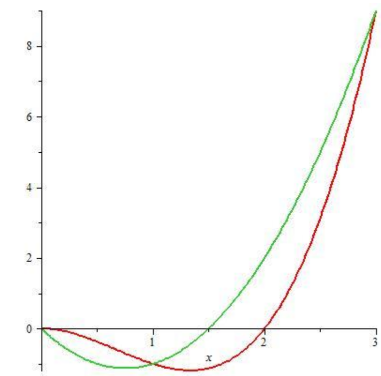
מלמטה, הישר $x=a$ משמאל והישר $x=b$ מימין, הוא $S=\int_a^b(f(x)-g(x))dx$

ב. יהיו u ו- v פונקציות רציפות בקטע $[c,d]$. אם $u(y)\geq v(y)$ לכל y בקטע, אזי שטח התחום המוגבל ע"י העקומה $x=v(y)$ משמאל, העקומה $x=u(y)$ מימין, הישר $y=c$ מלמטה והישר $y=d$ מלמעלה, הוא $S=\int_c^d\left(u(y)-v(y)\right)dy$

2. חשבו את שטח התחום הכלוא בין העקומות הנתונות:

א. $f(x)=x^3-2x^2,\ g(x)=2x^2-3x,\ x=0,\ x=3$

פתרון:



הגרף האדום זהו גרף של $f(x)$ והירוק של $g(x)$

נמצא את נקודות החיתוך של $f(x)$ ו- $g(x)$:

$$x^3-2x^2=2x^2-3x$$
$$x^3-4x^2+3x=0$$
$$x(x-1)(x-3)=0$$
$$x_1=0,x_2=1,x_3=3$$

לכל $0<x<1$ מתקיים $f(x)>g(x)$

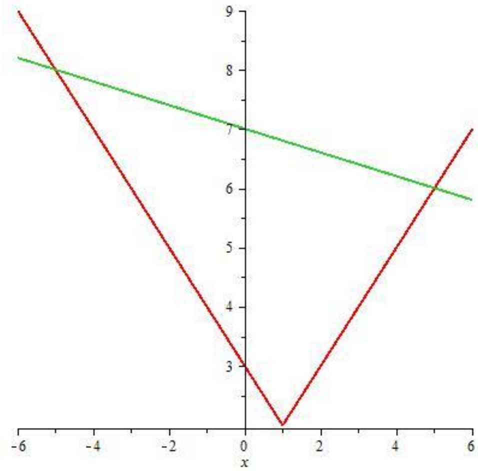
ולכל $1<x<3$ מתקיים $g(x)>f(x)$

ולכן

$$S=\int_0^1\left(f(x)-g(x)\right)dx+\int_1^3\left(g(x)-f(x)\right)dx$$
$$=\int_0^1 x^3-2x^2-\left(2x^2-3x\right)dx+\int_1^3 2x^2-3x-\left(x^3-2x^2\right)dx=\ldots=\frac{37}{12}$$

ב. $f(x)=2+|x-1|,\ g(x)=-\frac{1}{5}x+7$

פתרון:



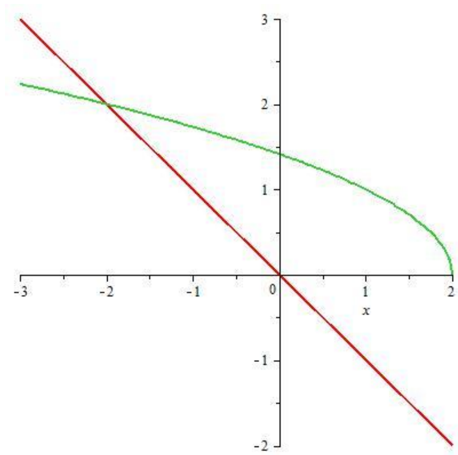
$f(x)=2+|x-1|=\begin{cases}-x+3 & x<1\\ x+1 & x\geq 1\end{cases}$ **(הגרף האדום)**

נקודות החיתוך של שני הגרפים: $x=-5, x=5$.

$$S=\int_{-5}^{1}-\frac{1}{5}x+7-(-x+3)dx+\int_{1}^{5}-\frac{1}{5}x+7-(x+1)dx=...24$$

ג. $f(x)=-x, g(x)=\sqrt{2-x}, y=0$

פתרון:



במקרה זה אם עושים אינטגרציה לפי x צריך לחלק את התחום לשני תחומים- החלק השמאלי החסום ע"י פרבולה מלמעלה וע"י ישר מלמטה והימני החסום בין הפרבולה לציר ה-x.

נוח יותר לעשות אינטגרציה לפי y ואז אין צורך לחלק לשני תחומים:

$y=-x\Rightarrow x=-y$ (רשמנו את הישר כפונקציה של y)

$y=\sqrt{2-x}\Rightarrow y^2=2-x\Rightarrow x=2-y^2$ (פרבולה כפונקציה של y)

במקרה זה $0\leq y\leq 2$ ו- $2-y^2\geq -y$ ולכן

$$S=\int_0^2\left(2-y^2-(-y)\right)dy=\ldots=\frac{10}{3}$$

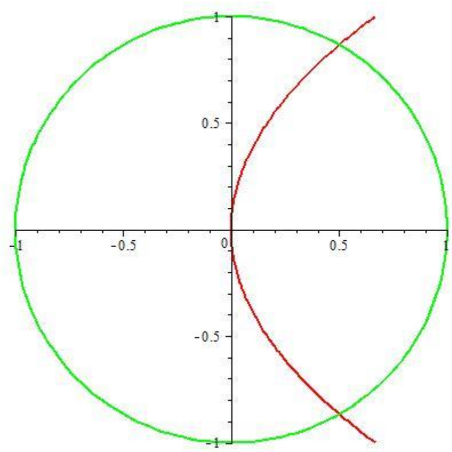
נוסחה לחישוב נפח של גוף סיבוב:

תהי $y=f(x)$ פונקציה רציפה ואי שלילית בקטע $[a,b]$. נפח הגוף הנוצר ע"י סיבוב של התחום המוגבל ע"י הגרף של $y=f(x)$ מלמעלה, ציר ה-x מלמטה והישרים $x=a$ ו- $x=b$ משמאל ומימין ניתן לחישוב ע"י הנוסחה:

$$V=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx$$

3. חשבו את הנפח של גוף סיבוב הנוצר ע"י סיבוב של התחום החסום ע"י $x^2+y^2=1,\ y^2=\frac{3}{2}x$ סביב ציר ה-x.

פתרון:



נמצא את שיעור ה-x של נקודות החיתוך של שני הגרפים:

$$\begin{cases}y^2=1-x^2\\ y^2=\frac{3}{2}x\end{cases}$$

$$1-x^2=\frac{3}{2}x$$

$$2x^2+3x-2=0$$

$x_1=-2<-1$ לא מתאים, כי $-1\le x\le 1$

$x_2=\frac{1}{2}$ זהו שיעור ה-x של נקודת החיתוך.

הגוף הנוצר ע"י סיבוב התחום סביב ציר ה-x יהיה מורכב משני חלקים:

החלק הנוצר ע"י סיבוב של הפרבולה $y=\sqrt{\frac{3}{2}x}$ בקטע $0\le x\le\frac{1}{2}$ סביב ציר ה-x

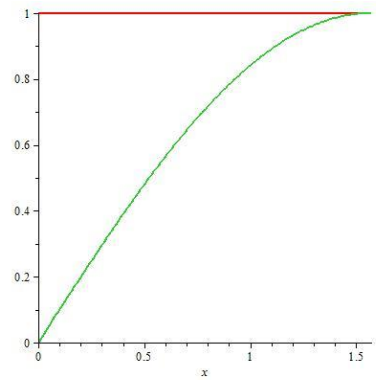
והחלק הנוצר ע"י סיבוב של קשת המעגל $y=\sqrt{1-x^2}$ בקטע $\frac{1}{2}\le x\le 1$ סביב ציר ה- x.

לסיכום נקבל:

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2dx+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2dx=...=\frac{19\pi}{48}$$

4. חשבו את הנפח של גוף סיבוב הנוצר ע"י סיבוב של התחום הכלוא בין $y=\sin x,\ y=1,\ x=0$ סביב ציר ה- y.

פתרון:



$$y=\sin x\Rightarrow x=\arcsin y,\ 0\le y\le 1$$

כלומר מסובבים את העקומה $x=\arcsin y$ בקטע $0\le y\le 1$ סביב ציר ה- y.

$$V=\pi\int_0^1(\arcsin y)^2\,dy$$

נציב $\arcsin y=t$, במקרה זה $y=\sin t$ ולכן $dy=\cos t\,dt$ וגבולות האינטגרציה החדשים הם $t=\arcsin 0=0$ גבול תחתון ו- $t=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$ גבול עליון.

$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos t\,dt$ עושים אינטגרציה בחלקים פעמיים

$g'=\cos t,\ f=t^2$ ואז $g=\sin t,\ f'=2t$

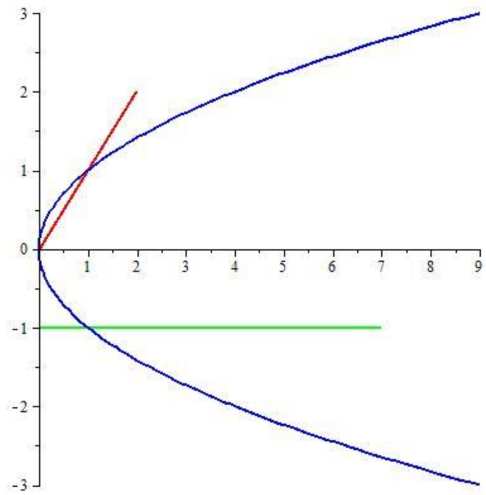
$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos t\,dt=\pi t^2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}2t\sin t\,dt$$

ושוב אינטגרציה בחלקים: $g'=\sin t,\ f=2t$ ואז $g=-\cos t,\ f'=2$

נמשיך ונקבל $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos t\,dt=\pi t^2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}2t\sin t\,dt=...=\frac{\pi\left(\pi^2-8\right)}{4}$

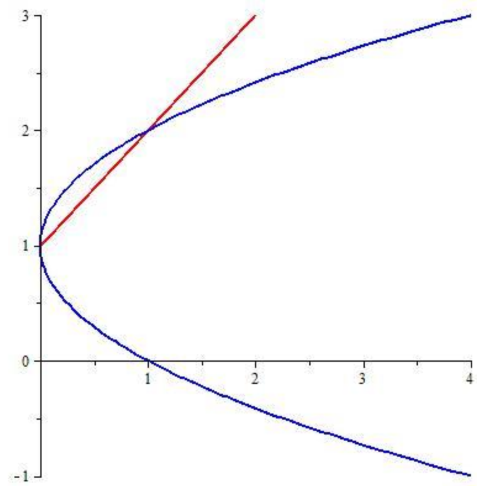
5. מצאו את נפח הגוף הנוצר כאשר מסובבים סביב הישר $y=-1$ את התחום הכלוא בין $x=y^2$ ל- $x=y$.

פתרון:



נעלה את התחום יחד עם הישר $y=-1$ (הישר הירוק בשרטוט) למעלה כך שהישר $y=-1$ יתלכד עם ציר ה- x.

התחום החדש כלוא בין $x=y-1, x=(y-1)^2$ ומסתובב סביב ציר ה- x.



הנפח של הגוף הנוצר שווה להפרש הנפחים של הגוף החיצוני הנוצר ע"י סיבוב של $x=(y-1)^2$ סביב ציר ה- x:

$x=(y-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x}=y-1 \Rightarrow y=\sqrt{x}+1$ ולכן $V_1=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}+1\right)^2 dx$

והגוף הפנימי הנוצר ע"י סיבוב של הישר $x=y-1$ סביב ציר ה- x

$x=y-1 \Rightarrow y=x+1$ ולכן $V_2=\pi\int_0^1(x+1)^2 dx$

$$V=V_1-V_2=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}+1\right)^2dx-\pi\int_0^1(x+1)^2dx=...=\frac{\pi}{2}$$

חישוב אורך קשת של עקומה חלקה

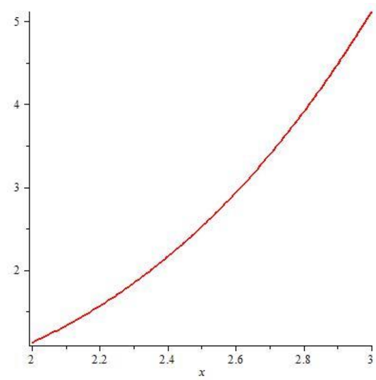
תהי $f(x)$ פונקציה חלקה ב- $[a,b]$.

אורך הקשת L של העקומה $y=f(x)$ מ- $x=a$ ל- $x=b$ מוגדר ע"י

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$$

6. מצאו את אורך הקשת של עקומה הנתונה ע"י $y=\frac{x^4}{16}+\frac{1}{2x^2}$ מ- $x=2$ ל- $x=3$.

פתרון:

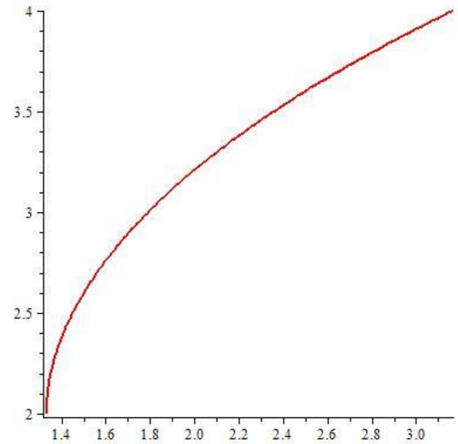


לפי הנוסחה הנ"ל

$$L=\int_2^3\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_2^3\sqrt{1+\left(\frac{x^3}{4}-\frac{1}{x^3}\right)^2}dx=...=\int_2^3\left(\frac{x^3}{4}+\frac{1}{x^3}\right)dx=...=\frac{595}{144}$$

7. מצאו את אורך הקשת של עקומה הנתונה ע"י $24xy=y^4+48$ מ- $y=2$ ל- $y=4$.

פתרון:



ניתן לכתוב את x כפונקציה של y ולעשות אינטגרציה לפי y בקטע $2 \le y \le 4$

$$x = \frac{y^3}{24} + \frac{2}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{8} - \frac{2}{y^2}$$

$$L = \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{y^2}{8} - \frac{2}{y^2}\right)^2}\, dy = \ldots = \frac{17}{6}$$